

18
20

TEST MATHS

Soit (u_n) défini par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① Calculer u_0, u_1, u_2, u_3

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$
$$u_0 = 1 ; u_1 = \frac{1}{2} ; u_2 = \frac{1}{3} ; u_3 = \frac{1}{4}$$

② Je conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{1}{n+1}$

Soit P_n la propriété : ~~u_n = 1/(n+1)~~ ; $u_n = \frac{1}{n+1}$

~~Supposons P_n vrai~~

~~Nous allons démontrer par récurrence P_{n+1} vraie~~

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ vraie

Initialisation

$$\text{pour } n=0, u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$$

Donc P_0 est vraie

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$; Supposons que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k}$$

(par définition de la suite)

$$\therefore u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k+1}}$$

(car on suppose P_k vrai)

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+1}{k+1} + \frac{1}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+2}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{k+2}$$

P_{k+1} est vraie

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$; P_n est vraie c'est-à-dire $\forall m \in \mathbb{N}$; $u_m = \frac{1}{1+m}$