DS 10 - 5 fev 2014

I

① $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4$ et $u_0 = 1$.

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$= \frac{1}{3} u_n + 4 - 6$

$= \frac{1}{3} u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3} v_n$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3} \text{ et 1er terme } v_0 = u_0 - 6 = -5}$

ⓑ On déduit alors par th : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 q^n$

c'est-à-dire $\boxed{v_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - 6 \implies u_n = v_n + 6$

et donc $\boxed{u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

ⓒ $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 6.}$

② on a $\forall n \geq 1$; $n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$

ⓐ on a donc $10 . w_{10} = 11 . w_9 + 1$

$= 11 \times 19 + 1$ ainsi $\boxed{w_{10} = \frac{210}{10} = 21}$

5) Soit P_n la ppté : $w_n = 2n + 1$

Montrons par récurrence que $\forall n$, P_n est vraie.

Initialisat° : pour $n=0$, $w_0 = 1$ $\Rightarrow$ P_0 vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

P_k vraie $\Rightarrow$ $w_k = 2k+1$

et d'après la définit° de w_n avec $n = k+1$ on a

$$(k+1)w_{k+1} = (k+2)w_k + 1$$
$$= (k+2)(2k+1) + 1 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$
$$= 2k^2 + 5k + 3$$
$$= (k+1)(2k+3)$$

ainsi $w_{k+1} = 2k+3$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_n = 2n+1$.

On déduit donc que (w_n) est arithmétique de 1er terme $w_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

$w_{2009} = 2.2009 + 1 = 4019$

II 1) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$. $D = \mathbb{R}_+^*$

f dérivable pour $x > 0$ et $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 7) \cdot \frac{1}{x^2}$$

ainsi $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

x		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$	
$x^2 - 7$	+	0	−	0	+

On déduit alors le tableau de variations de f :

x	0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\sqrt{7})$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations de f : $f(\sqrt{7})$ est le minimum de f atteint en $x=\sqrt{7}$.

et $f(\sqrt{7}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{2} 2\sqrt{7} = \sqrt{7}$.

ainsi $\forall x>0$; $f(x) \geqslant \sqrt{7}$ (puisque $\sqrt{7}$ minimum)

en particulier ; $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 0$ (admis sans dém)

donc $f(u_n) \geqslant \sqrt{7}$ c.à.d $u_{n+1} \geqslant \sqrt{7}$.

c'est donc que $\forall n \geqslant 1$; $u_n \geqslant \sqrt{7}$

d'autre part pour $n=0$; $u_0 = 3 > \sqrt{7}$

finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n \geqslant \sqrt{7}}$.

2a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - u_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{u_n} - u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}(7 - u_n^2) \times \frac{1}{u_n}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{7} \Rightarrow u_n^2 \geqslant 7$ car $x \longmapsto x^2 \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

donc $7 - u_n^2 \leqslant 0$

d'autre part ; $\frac{1}{u_n} > 0$ puisque $u_n > 0$.

finalement, par produit $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$

(b) On déduit de (2a) que (u_n) est décroissante de plus d'après les hypothèses (u_n) est minorée par 0 donc par th $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } l \geq 0.}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$.

et (u_n) converge vers l, donc d'après le th du point fixe $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{7}{l}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{7}{l} - l\right) = 0 \iff 7 = l^2 \quad (l \neq 0)$$

$$\iff l = \sqrt{7} \text{ ou } \underbrace{l = -\sqrt{7}}_{\text{impossible car } l \geq 0}$$

$$\iff \boxed{l = \sqrt{7}}$$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u_n^2 + 7 - 2\sqrt{7}u_n}{u_n}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$$

(4)(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2$ avec $d_0 = 1$

Soit P_n la pté $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

<u>Initialisat°</u> : pour $n = 0$; $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \simeq 0{,}35$

et $d_0 = 1$ donc $u_0 - \sqrt{7} < d_0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie

P_k vraie donc $u_k - \sqrt{7} \leq d_k$. $\Longrightarrow (u_k - \sqrt{7})^2 \leq d_k^2$ car $x \longmapsto x^2 \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

d'après ③ $\quad u_{k+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_k - \sqrt{7})^2}{u_k}$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{d_k^2}{u_k} = \frac{d_{k+1}}{u_k}$$

mais $u_k \geq \sqrt{7} \Rightarrow \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{\sqrt{7}} \leq 1$

donc par produit $\frac{d_{k+1}}{u_k} \leq d_{k+1}$ (car $\forall k \; d_k > 0$ par def de (d_k))

finalement on a bien $u_{k+1} - \sqrt{7} \leq d_{k+1}$

ainsi P_{k+1} vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n - \sqrt{7} \leq d_n.}$

b) En entrant la valeur 9, l'algo renvoit $n = 5$.

cela veut dire que $d_5 < 10^{-9}$

Car $u_n \geq \sqrt{7} \; \forall n$.

et donc d'après ce qui précède $0 \leq u_5 - \sqrt{7} \leq d_5$

ainsi u_5 est une valeur approchée à 10^{-9} de $\sqrt{7}$.

Quelle rapidité de convergence non ? $\sqrt{7} \approx 2,645 \ldots\ldots$

III ① ⓐ Voir graphique

ⓑ $(U_n) \downarrow$ et converge vers ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

② ⓐ Soit P_n la propriété $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Montrons par récurrence que $\forall n$ P_n est vraie.

Initialisat°: $u_1 = \dfrac{4u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{19}{7} \simeq 2{,}7$ et $u_0 = 5$

donc on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0$ $\Rightarrow$ P_0 vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

Variat° de f : f dérivable si $x > -2$ et $f'(x) = \dfrac{(x+2)4 - (4x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{9}{(x+2)^2} > 0$

donc f est croissante sur $]-2, +\infty[$.

P_k vraie $\Rightarrow$ $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$.

$\Rightarrow$ $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ (car $f \uparrow$ sur $\mathbb{R}_+$)

$\Rightarrow$ $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$

$\Rightarrow$ P_{k+1} vraie

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n}$.

En particulier $u_n - 1 \geq 0$.

2b On déduit de ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 1$

et $u_{n+1} \leq u_n$ c'est à dire $(U_n) \downarrow$ et minorée par 1

donc par th : $\boxed{(U_n) \text{ converge vers } \ell \geq 1}$

$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } l \geq 0 \\ f \text{ continue sur }]2,+\infty[\end{array}\right\}$ Th du pt fixe $\Rightarrow$ $l = f(l)$

$$l = f(l) \iff l = \frac{4l-1}{l+2} \iff l^2 + 2l = 4l - 1$$
$$\iff l^2 - 2l + 1 = 0 \iff (l-1)^2 = 0$$
$$\iff l = 1.$$

$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } l = 1}$

3 a $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1}$$

$$= \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$$

$$= \left(\frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{u_n + 2 - (u_n - 1)}{3(u_n - 1)} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{u_n - 1} + \frac{1}{3} = v_n + \frac{1}{3}$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ arithmétique de raison } \frac{1}{3} \text{ et premier terme } v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}}$

b Par th : $v_n = v_0 + nr$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3}$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$ c.à.d $\boxed{u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{4} + \frac{n}{3}} + 1}$

c $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{3}\right) = +\infty$ donc par quotient et somme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$