DS 11 - 3 mars 2014

I

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{6x-9}{x^2-3x+2}\,dx$$

$$= 3\int_{-2}^{-1} \underbrace{\frac{2x-3}{x^2-3x+2}}_{\frac{u'}{u}}\,dx = 3\left[\ln|x^2-3x+2|\right]_{-2}^{-1}$$

$$= 3\left(\ln(1+3+2) - \ln(4+6+2)\right)$$

$$= 3\left(\ln\frac{6}{12}\right) = \boxed{-3\ln 2}$$

$$I_2 = \int_1^2 x\sqrt{3x^2+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^2 \underbrace{6x\sqrt{3x^2+5}}_{u'u^{1/2}}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{(3x^2+5)^{3/2}}{3/2}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{18}\left(17^{3/2} - 8^{3/2}\right) = \boxed{\frac{1}{9}\left(17\sqrt{17} - 8\sqrt{8}\right)}$$

$$I_3 = \int_1^e \underbrace{\frac{(\ln x)^3}{x}}_{u'u^3}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}\left[-\cos(3x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \cos\frac{3\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \underbrace{\sin x \, e^{-\cos x}}_{u'e^u}\,dx$$

$$= \left[e^{-\cos x}\right]_0^{\pi/3} = e^{-\cos \pi/3} - 1$$

$$= e^{-1/2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1$$

$$= \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{e}-e}{e}}$$

II $\quad x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$

1 a) sur $[0,1]$; $\cos t > 0 \Rightarrow t^n \cos t > 0$.

donc par th de positivité, $\boxed{x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt > 0}$.

b) pour $t \in [0,1]$ on a $\quad t \leq 1$

$$\Rightarrow t^{n+1} \leq t^n \quad (\times t^n \text{ avec } t > 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{t^{n+1} \cos t \leq t^n \cos t} \quad (\times \cos t \text{ avec } \cos t > 0)$$

c) les bornes sont dans l'ordre $(0 < 1)$ donc par intégrat de l'inégalité :

$$\int_0^1 t^{n+1} \cos t\,dt \leq \int_0^1 t^n \cos t \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$$

donc $\boxed{(x_n) \downarrow}$.

d) (x_n) décroissante et minorée

donc par th (x_n) converge.

(2.a) $\forall t \in [0,1]$

$\cos(t) \leq 1 \implies t^n \cos t \leq t^n$ (car $t^n > 0$)

donc par intégrat° de l'inégalité :

$$\int_0^1 t^n \cos t \, dt \leq \int_0^1 t^n \, dt$$

$$\implies x_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\implies \boxed{x_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

(b) On a donc $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$

et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le th des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0}.$$