2013/2014 **CORRECTION BAC BLANC** TS

## Exercice n°1

### Proposition 1 : VRAI

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{pour } x \leq 1 \\ 3x+2 & \text{pour } 1 < x \leq 10 \end{cases}$$

$x \mapsto 2x+3$ est continue sur $]-\infty ; 1]$ (fonction affine)

$x \mapsto 3x+2$ " " $]1 ; 10]$ " "

De plus $\lim\limits_{x \to 1^+} 3x+2 = 5 = f(1)$ donc $f$ continue en 1.

Donc $f$ continue sur $]-\infty ; 10]$

### Proposition 2 : FAUX

$\forall x \in ]-\infty ; 1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{2x+3-5}{x-1} = \dfrac{2(x-1)}{x-1}$

$\forall x \in ]1 ; 10]$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{3x+2-5}{x-1} = \dfrac{3(x-1)}{x-1}$

D'où $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, $f$ n'est pas dérivable en 1

D'où $f$ n'est pas dérivable sur $]-\infty ; 10]$

### Proposition 3 : VRAI

Soit A d'affixe $i$ et B d'affixe $-2i$

$|z-i| = |z+2i| \iff AM = BM$

$\iff M$ appartient à la médiatrice de $[AB]$

$\Rightarrow \Delta$ parallèle à l'axe des réels car A et B appartiennent à l'axe des imaginaires.

### Proposition 4 : FAUX

Contre-exemple : Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

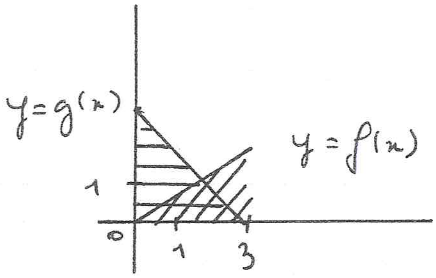
**Proposition 5 : FAUX**

Contre exemple : Soient $f(x) = \frac{2}{3}x$ et $g(x) = -x+3$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{et} \quad \int_0^3 g(x)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

D'où $\int_0^3 f(t)\,dt < \int_0^3 g(t)\,dt$

mais $\forall x \in \left[\frac{9}{5} ; 3\right]$, $f(x) \geq g(x)$.




**Proposition 6 : VRAI**

Calculons $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{1-i\sqrt{3}+2}{1+i\sqrt{3}+2} = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = \dfrac{9-6i\sqrt{3}-3}{9+3}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$

avec A d'affixe a
B d'affixe b
C d'affixe c

D'où ① $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = 1$ et $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{|b-a|}{|c-a|} = \dfrac{AB}{AC}$

D'où $AB = AC$

② $\text{Arg}\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

**Donc ABC équilatéral.**

**Proposition 7** ~~FAUX~~ **VRAI**

Soit A d'affixe $2-i$ et B d'affixe $-i$, $\Omega$ d'affixe $1-i$ le milieu de $[AB]$

$Z$ imaginaire pur ssi $\begin{cases} Z = 0 \\ \text{ou} \\ \arg Z = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$

~~$\arg Z = (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{AM})$~~ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$ car $\arg Z = (\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de B

$\Rightarrow M \in \mathcal{C}$

## Exercice n°2 :

$\forall x \in ]0;+\infty[ \quad , \quad f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

**1°) a)** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ par somme puis par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

**b)** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$ par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ d'où par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

**c)** D'après a) $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

D'après b) $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$

**2°) a)** $f$ est définie continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x>0, f'(x) = \dfrac{1/x \times x^2 - (1+\ln x)(2x)}{x^4} = \dfrac{1-2(1+\ln x)}{x^3} = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$

**b)** $\forall x>0, \; -1-2\ln x > 0 \iff \ln x < -\frac{1}{2}$

$\iff x < e^{-1/2}$ car $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff x < \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

or $x^3 > 0$ sur $]0;+\infty[$

D'où $f'(x) > 0$ pour $x \in ]0;\frac{\sqrt{e}}{e}[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in ]\frac{\sqrt{e}}{e};+\infty[$

**c)** tableau de variations

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}/e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $e/2$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(e^{-1/2}) = \dfrac{1+\ln(e^{-1/2})}{(e^{-1/2})^2}$

$= \dfrac{1-1/2}{e^{-1}}$

$= \dfrac{e}{2}$

3°) ⓐ $f(x)=0 \iff \dfrac{1+\ln x}{x^2}=0$

$\iff \ln x = -1$

$\iff x = \dfrac{1}{e}$ car $x \mapsto e^x$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.

Donc $\mathcal{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses de coordonnées $(1/e\,;0)$

ⓑ Sur $]0, \frac{1}{e}[$

$x < \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) < 0$ car $f$ strictement croissante et $f(\frac{1}{e})=0$

Sur $]\frac{1}{e} ; \frac{1}{\sqrt{e}}[$

$\frac{1}{e} < x < \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow f(x) > 0$ car $f$ strictement croissante.

Sur $]\frac{1}{\sqrt{e}} ; +\infty[$

$\left\{\begin{array}{l} f \text{ strictement décroissante} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) > 0$.

4°)
ⓐ $I_2 = \displaystyle\int_{1/e}^{2} f(x)\,dx$.

$\frac{1}{e} < x < 2 \Rightarrow 0 < f(x) < \frac{e}{2}$ d'après 3°) ⓑ

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1/e}^{2} 0\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{1/e}^{2} \frac{e}{2}\,dx$ par relation d'ordre car $1/e < 2$

$\iff 0 < I_2 < \frac{e}{2}\left(2-\frac{1}{e}\right)$

ⓑ $\forall n \geq 1,\ I_n = \displaystyle\int_{1/e}^{n} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{1/e}^{n} = \frac{-2-\ln n}{n} - \frac{-2-\ln 1/e}{1/e}$

$= \dfrac{-2-\ln n - (-2e + e\ln e)}{n} = \dfrac{-2-\ln n}{n} + e$

ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$

L'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\frac{1}{e}$ et $x=n$ tend vers $e$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$

remarque : $\forall x>0,\ F'(x) = \dfrac{-1/x \times x - (-2-\ln x)}{x^2} = \dfrac{-1+2+\ln x}{x^2} = f(x)$

Exercice n°3

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{9}{6 - V_n} \end{cases}$$

$\boxed{A}$ 1°) L'algorithme n°1 n'affiche que le dernier terme : ne convient p

L'algorithme n°2 remet V à 1 à chaque ~~boucle~~ pas il calcule $V_1$ n fois et ne convient donc pas. L'algorithme n°3 convient.

2°) $(V_n)$ semble croissante et converger vers 3.

3°) ⓐ Récurrence

Au rang 0 $\quad V_0 = 1 \quad$ d'où $\quad 0 < V_0 < 3$

On suppose $0 < V_k < 3$ avec k entier naturel

$$\Leftrightarrow 6 - 0 > 6 - V_k > 6 - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - V_k} < \frac{1}{3}$$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - V_k} < \frac{9}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < V_{k+1} < 3 \quad \text{car } 0 < \frac{9}{6}$$

Conclusion Par récurrence sur k, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq V_n < 3$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n = \dfrac{9}{6 - V_n} - V_n = \dfrac{9 + V_n^2 - 6V_n}{6 - V_n} = \dfrac{(3 - V_n)^2}{6 - V_n}$

or $6 - V_n > 0$ car $V_n < 0$ et $(3 - V_n)^2 \geq 0$ (carré)

D'où $V_{n+1} - V_n \geq 0$ et $(V_n)$ est croissante

ⓒ $\begin{cases} (V_n) \text{ croissante} \\ (V_n) \text{ majorée par } 3 \end{cases}$ donc $(V_n)$ converge, appelons $\ell$ sa limite.

$\boxed{B}$ $W_n = \dfrac{1}{V_n - 3}$

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} - W_n = \dfrac{1}{V_{n+1} - 3} - \dfrac{1}{V_n - 3}$

$$= \frac{1}{\frac{9}{6 - V_n} - 3} - \frac{1}{V_n - 3}$$

$$= \frac{6 - V_n}{9 - 3 \times 6 + 3V_n} - \frac{1}{V_n - 3}$$

$$= \frac{6 - V_n - 3}{} - 1$$

Donc $(W_n)$ est arithmétique de raison $(-1/3)$ et de premier terme $W_0 = \frac{1}{V_0 - 3} = -1/2$

2°) D'où $W_n = W_0 + n a$ $\qquad W_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

or $W_n = \frac{1}{V_n - 3} \iff V_n - 3 = \frac{1}{W_n}$

$\iff V_n = \frac{1}{-1/2 - n/3} + 3$

$\iff V_n = \frac{6}{-3 - 2n} + 3$

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} -3 - 2n = -\infty$ d'où par quotient puis par somme

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 3$$

Exercice n°04 : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$

$\boxed{A}$ 1°) $z_0 = 1 + i$

d'où $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$ et $|z_0| = \sqrt{2}$

2°) $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{i}{3}$ d'où $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$

3°) a)

| k | A | B |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |

b) La valeur affichée est celle de $a_n$

$\boxed{B}$ 1°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{a_n + i b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$

$= \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + \dfrac{b_n}{3} i$

D'où $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$

2°) $(b_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = 1$

D'où $b_n = b_0 \times q^n \Rightarrow b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ avec $q \in ]-1;1[$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

3°) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \dfrac{|z_n + |z_n||}{3}$

or $|z_n + |z_n|| \leq |z_n| + |z_n|$ (inégalité triangulaire)

D'où $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{3} |z_n|$

b) Récurrence

Au rang 0 $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$

D'où $u_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$

On suppose $u_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \sqrt{2}$ avec $k$ entier naturel

D'après 3°a) $u_{k+1} \leq \dfrac{2 u_k}{3} \Rightarrow u_{k+1} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \sqrt{2}$

$\Rightarrow u_{k+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \sqrt{2}$

Conclusion Par récurrence sur k, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

Or $0 \leq u_n$ (module) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$ car $\frac{2}{3} \in ]-1;1[$

En appliquant le théorème des gendarmes à $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

or $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{a_n^2}$ car $b_n^2 \geq 0$

Donc $u_n \geq |a_n|$ De plus $|a_n| \geq 0$ (module)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

En appliquant le théorème des gendarmes à $0 \leq |a_n| \leq u_n$

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$. donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$