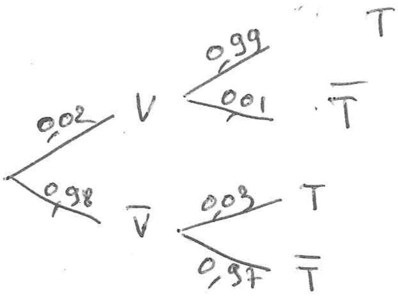
DS 13 . 28 avril 2014

I A 1 a d'après l'énoncé : $P(V) = 0{,}02$; $P_V(T) = 0{,}99$; $P_{\bar V}(\bar T) = 0{,}97$

D'après la loi des noeuds on a alors :



On a alors

$$P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$$

2 D'après les règles de calcul sur les arbres :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar V \cap T)$$

$$= 0{,}02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0492$$

3 a On a $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(V) \times P_V(T)}{P(T)} \simeq 0{,}40$

Donc la probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est de 40%.

b $P_{\bar T}(\bar V) = \dfrac{P(\bar T \cap \bar V)}{P(\bar T)} = \dfrac{P(\bar V) \times P_{\bar V}(\bar T)}{1 - P(T)} \simeq 0{,}9998$ à 10^{-4}

B 1 On a une expérience de Bernoulli qui consiste à choisir une personne de la population et dont l'issue succès est la personne est contaminée avec pour issue succès $p = 0{,}0492$.

On répète 10 fois de manière indépendante cette expérience.

La variable X comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(p, 10)$

2 $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$$= 1 - (1 - 0{,}0492)^{10} - 10(1 - 0{,}0492)^9 \, 0{,}0492$$

$$= 0{,}0838$$

II ① A, B, J sont dans le même plan (celui de la face ABFE) et non alignés
I est sur la face parallèle (GHD)
en conséquence A, B, I, J non coplanaires.

② P_1 plan médiateur de [AB]

$\Leftrightarrow P_1$ est le plan perpendiculaire à (AB) passant par $P(1,0,0)$

on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

donc $P_1 : 2x + d = 0$ et $P(1,0,0) \in P_1 \Rightarrow d = -2$

d'où $P_1 : 2x+2=0 \Leftrightarrow \boxed{P_1 : x = 1}$

③ $I(1,3,0)$ $J(1,0,1)$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$

$M \in P_2$ médiateur de (IJ)

$\Leftrightarrow MI = MJ \Leftrightarrow MI^2 = MJ^2$ avec $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}1-x\\3-y\\-z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MJ}\begin{pmatrix}1-x\\-y\\1-z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2+(3-y)^2+(-z)^2 = (1-x)^2+(-y)^2+(1-z)^2$

$\Leftrightarrow 9-6y+y^2+z^2 = y^2+1-2z+z^2$

$\Leftrightarrow 6y-2z-8=0$

$\Leftrightarrow 3y-z-4=0$

d'où $\boxed{P_2 : 3y-z-4=0}$.

④ ⓐ $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à P_1 et P_2

et $x_{\overrightarrow{n_2}} = 0\, x_{\overrightarrow{n_1}}$
et $y_{\overrightarrow{n_2}} \neq 0 \cdot y_{\overrightarrow{n_1}}$ donc $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ non colinéaires $\Rightarrow$ P_1 et P_2 sécants

(b) $M(x,y,z) \in P_1 \cap P_2$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ 3y - z - 4 = 0 \end{cases} \overset{\text{paramétrisat}^{\circ}}{\iff} \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

(c) $\Omega \in \Delta \iff \Omega(1, t, 3t-4)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$\Omega A = \Omega I \iff \Omega A^2 = \Omega I^2$ $\quad \vec{\Omega A}\begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ -3t+4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\Omega I}\begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \\ -3t+4 \end{pmatrix}$

$\iff 1 + (-t)^2 + (-3t+4)^2 = (3-t)^2 + (-3t+4)^2$

$\iff t^2 = 9 - 6t + t^2 \iff t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

alors $\boxed{\Omega\left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)}$

(d) $\Omega \in \Delta$ donc

$\Omega \in P_1 \Rightarrow \Omega A = \Omega B$

$\Omega \in P_2 \Rightarrow \Omega I = \Omega J$

de plus d'après (c) $\Omega A = \Omega I$

donc on a $\Omega A = \Omega B = \Omega I = \Omega J \Longrightarrow$ $\boxed{\Omega \text{ centre de la sphère circonscrite à } A, B, I, J.}$

III (A) (1) d'après le graphique :

x		-2	
$f(x)$	$-$	0	$+$

(2) (a) $F'(0) = f(0) = 2$

$F'(-2) = f(-2) = 0$.

(b) d'après le tableau de signe du (1), on a $F'(x) < 0$ pour $x < -2$
$F'(x) > 0$ pour $x > -2$

donc F décroissante sur $]-\infty, -2[$ et F croissante sur $]-2, +\infty[$

La courbe correspondant à F est donc C_1

B 1 a $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}$

$= e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$

$= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}(x+4)$

b $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+4$

d'où le tableau de variation de f :

x		-4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{e^2}$	$\nearrow$

En effet, f admet $-\frac{2}{e^{+2}}$ comme minimum atteint en $x = -4$.

2 $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$f(x) \geq 0$ sur $[0,1]$ donc d'après le cours I est l'aire de la zone du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe (xx') et les droites d'équat° $x=1$ et $x=0$.

b $u(x) = x$; $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$\Rightarrow u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

donc $2(u'v + v'u) = 2\left(e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x e^{\frac{1}{2}x}\right)$

$= e^{\frac{1}{2}x}(2+x) = f(x)$

$(2uv)' = 2(uv)'$
$= 2(u'v + uv') = f$ donc f admet $2uv$ comme primitive.

Alors $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[2uv\right]_0^1 = \left[2xe^{\frac{1}{2}x}\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$

3 a) Faisons la trace de l'algorithme pour $n = 3$.

k	s
/	0
0	$\frac{1}{3} f(0)$
1	$\frac{1}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1/3)$
2	$\frac{1}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1/3) + \frac{1}{3} f(\frac{2}{3})$

On a comme résultat $s = \frac{1}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1/3) + \frac{1}{3} f(\frac{2}{3})$

Ce qui correspond à la somme des aires des 3 rectangles (chacun de largeur $1/3$).

b) d'après le cours $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = I$ (méthode des rectangles).