21 sept 2015

DS 1

I $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit P_n la propriété $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisat° : pour $n=0$ $\dfrac{2}{2n+1} = 2$ et $u_0 = 2$ donc P_0 vraie.

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow u_q = \dfrac{2}{2q+1}$

alors $u_{q+1} = \dfrac{u_q}{1+u_q} = \dfrac{\frac{2}{2q+1}}{1+\frac{2}{2q+1}}$

$$= \frac{\frac{2}{2q+1}}{\frac{2q+1+2}{2q+1}} = \frac{2}{2q+1} \times \frac{2q+1}{2q+3} = \frac{2}{2q+3}$$

$$= \frac{2}{2(q+1)+1}$$

et donc on a bien P_{q+1} vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}}$

II $g(x) = \sin x - x$; $x > 0$

1 a g dérivable et $\forall x > 0$ $g'(x) = \cos x - 1$

or $\forall x$, $\cos x \leq 1$ donc $g'(x) \leq 0$ donc $g \searrow$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	

(1b) Soit $x > 0$

alors $g(x) < g(0)$ car $g \downarrow$ sur $\mathbb{R}_+$

c.à.d $g(x) < 0$

donc g négative sur $\mathbb{R}_+$

(2) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$.

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = -\frac{2x}{2} + \sin x$

$= \sin x - x$

$= g(x)$

On a bien $f' = g$.

(b) On déduit alors le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

et $f(0) = 1 - 1 = 0$

(c) $\forall \; x > 0$ on a $f(x) \leq f(0)$ car $f \downarrow$ sur $\mathbb{R}_+$

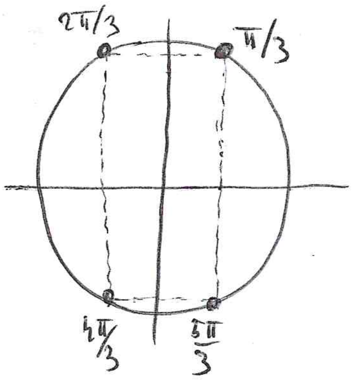
donc $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$

donc $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$. D'autre part par th $\cos x \leq 1$ Cqfd.

III

$$4\sin^2 x \geq 3 \iff \sin^2 x \geq \frac{3}{4}$$

$$\iff |\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{Car } x \mapsto \sqrt{x} \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+$$



$$\iff \boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]}$$

IV

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{2}{x} \iff \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2 - 2(x-1)}{x(x-1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} \leq 0$$

Etudions le signe de $P(x) = x^2 - 2x + 2$:

$\Delta = 4 - 8 < 0$ donc $P(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nous avons donc le tableau de signe suivant :

x		0		1	
x^2-2x+2	+		+		+
x	−	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
$\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)}$	+	‖	−	‖	+

donc $\boxed{S =]0 ; 1[}$

$\boxed{\text{V}}$

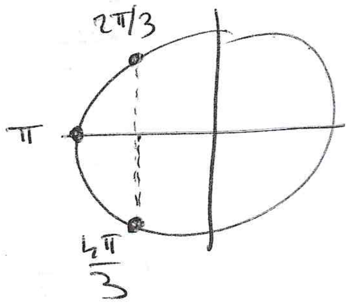
$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \quad (E)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ 2X^2 + 3X + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Résolution de $(*)$

$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow X = \dfrac{-3+1}{4} = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = \dfrac{-3-1}{4} = -1$

donc $(E) \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$



donc $\boxed{S = \left\{ \dfrac{2\pi}{3} ; \pi ; \dfrac{4\pi}{3} \right\}}$