DS2

5 oct 2015.

I ① $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad -1 \leq \sin\left(\frac{n^3}{3}\right) \leq 1$

donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ $\quad$ ($\div n$ avec $n>0$)

d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ $\quad$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

(d'après le th des gendarmes)

② $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

$$= \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}$$

et $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc par th $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1}$ (par quotient)

③ $w_n = 3n^3 - 2n^2 + 2$

w_n est un polynôme de degré 3 en n donc par th $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^3 = +\infty}$

II $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

x		-2		1	
$(x+2)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $f_1(x) = \dfrac{4-x}{(x+2)(x-1)}$

$$\lim_{x \to -2} 4 - x = 6$$

$\lim_{x \to -2^+} (x+2)(x-1) = 0^-$ donc par quotient $\boxed{\lim_{-2^+} f_1 = -\infty}$

$\lim_{x \to -2^-} (x+2)(x-1) = 0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim_{-2^-} f_1 = +\infty}$.

② $f_2(x) = \dfrac{3x^3 - x^2}{x^2 - 3}$ est une fonction rationnelle

donc par th $\lim_{-\infty} f_2 = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$.

III ① On conjecture que $(u_n) \nearrow$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

② $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3}$

$$= \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\frac{2u_n + 3 + 3(u_n + 4)}{u_n + 4}}$$

$$= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5} v_n$$

donc (v_n) géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et 1er terme $v_0 = -3$

③ Par th $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{v_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

④ $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ $\iff v_n(u_n + 3) = u_n - 1$

$\iff u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$

$\iff u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$

et donc $\boxed{u_n = \dfrac{1 - 9\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^n}}$

(5) $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ donc par th $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 9\left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$

ainsi donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(6) (a) Le graphe de f nous permet de conjecturer que $(w_n) \searrow$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

(b) Soit $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$; $x > -4$

f est dérivable et $\forall x > -4$, $f'(x) = \frac{(x+4)\times 2 - (2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}$

ainsi $f'(x) > 0$ donc $f \nearrow$ sur $]-4 ; +\infty[$.

Soit P_n la ppté : $1 \leq w_{n+1} \leq w_n$.

montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Init : $w_0 = 5$; $w_1 = \frac{13}{9}$ donc on a bien $1 \leq w_1 \leq w_0$

donc P_0 vraie.

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$ montrons P_q vraie $\Rightarrow P_{q+1}$ vraie.

P_q vraie donc $1 \leq u_{q+1} \leq u_q$

$\Rightarrow f(1) \leq f(u_{q+1}) \leq f(u_q)$ car $f \nearrow$ sur $]-4 ; +\infty[$

$\Rightarrow 1 \leq u_{q+2} \leq u_{q+1} \Longrightarrow P_{q+1}$ vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq w_{n+1} \leq w_n$.

ⓒ On déduit que (w_n) ↘ et (w_n) minorée par 1

donc par th (w_n) converge vers $\ell \geqslant 1$

$$\left.\begin{array}{l} w_{n+1} = f(w_n) \\ (w_n) \text{ converge vers } \ell \in]-4, +\infty[\\ f \text{ continue sur }]-4, +\infty[\end{array}\right\} \text{ par th } \ell = f(\ell)$$

donc

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{2\ell+3}{\ell+4}$$

$$\iff \ell^2 + 4\ell = 2\ell + 3$$

$$\iff \ell^2 + 2\ell - 3 = 0$$

$$\iff (\ell - 1)(\ell + 3) = 0$$

donc $\ell = 1$ ou $\underbrace{\ell = -3}_{\text{refusée car } \ell \geqslant 1}$

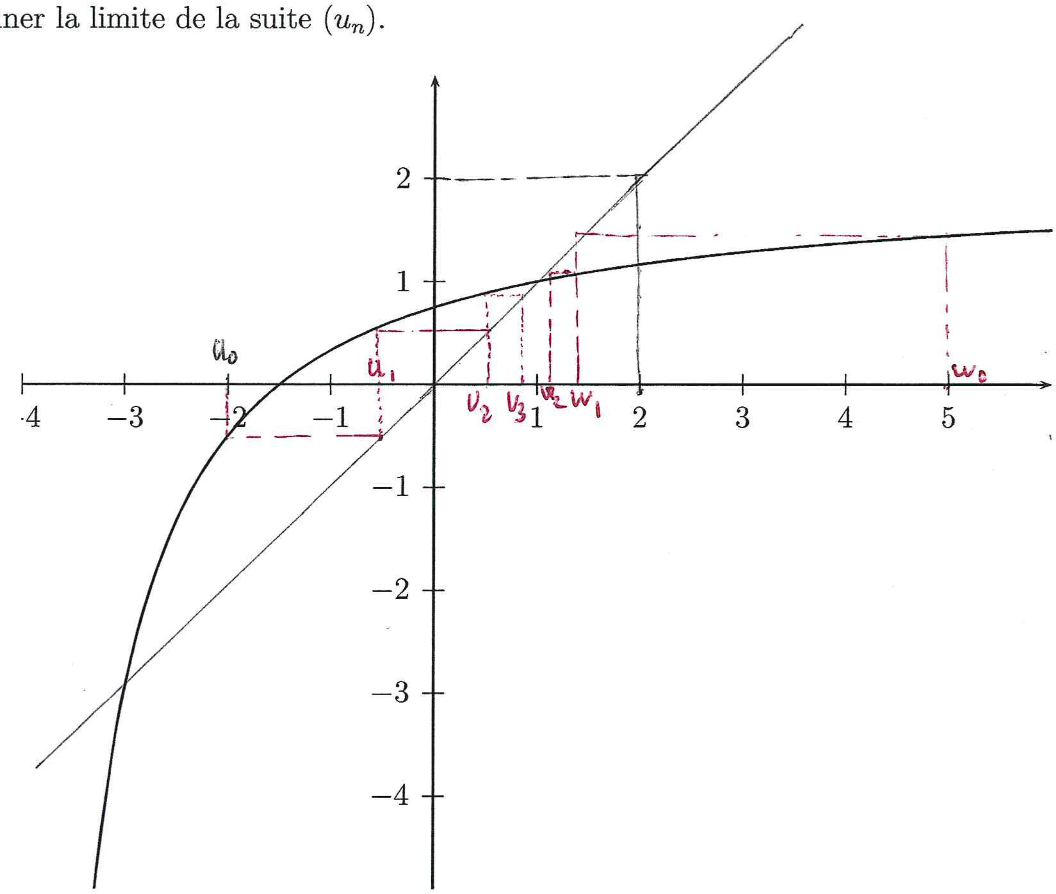
donc $\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$.

3 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.

1. Représenter les premiers termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. Puis faire une conjecture quant à l'éventuelle limite de la suite (u_n).
2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).



6. On définit $(w_n)_{n\geq 0}$ par :
$$\begin{cases} w_0 = 5 \\ w_{n+1} = f(w_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   a) A l'aide du graphe de f, que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de (w_n) et la convergence de (w_n) ?
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq w_{n+1} \leq w_n$.
   c) Conclure sur la convergence de la suite (w_n).