DS3

I ① $f_1(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$

$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$ donc

x		-1		-2	
x^2+3x+2	$-$	0	$+$	0	$-$

donc $\lim\limits_{x\to -2} x-4 = -6$

$\lim\limits_{x\to -2^-} x^2+3x+2 = 0^-$ d'après le tableau de signe.

donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{-2^-} f_1 = +\infty}$.

② $f_2(x) = x^3 - x^2\sqrt{x}$

$= x^3\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \forall x > 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty}$

③ $f_3(x) = (-3x^2+5x-11)^{111}$

$$\left.\begin{array}{l} X = -3x^2+5x-11 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2+5x-11) = -\infty \text{ (par th)} \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^{111} = -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{+\infty} f_3 = -\infty}.$$

④ $f_4(x) = \dfrac{x^5+4x^2+3\pi}{5-x^2}$ est une fonction rationnelle

donc par th $\lim\limits_{-\infty} f_4 = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$

⑤ $f_5(x) = \dfrac{\sin((x-1)^2)}{x-1}$

$= \dfrac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2} \cdot (x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} X = (x-1)^2 \\ \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Composée}} \lim_{x \to 1} \frac{\sin((x-1))^2}{(x-1)^2} = 1$$

et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{1} f_5 = 0}$.

⑥ $f_6(x) = \dfrac{\cos(3x) + x}{x+2}$

$\forall x < -2 \quad -1 \leq \cos 3x \leq 1$

$\Rightarrow x - 1 \leq \cos 3x + x \leq 1 + x$

$\Rightarrow \dfrac{x-1}{x+2} \geqslant \dfrac{\cos 3x + x}{x+2} \geqslant \dfrac{x+1}{x+2}$ $\quad (\div\ x+2$ avec $x+2<0)$

finalement, $\forall x < -2 \quad \dfrac{x+1}{x+2} \leq f_6(x) \leq \dfrac{x-1}{x+2}$

par th $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x+2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-1}{x+2} = 1$

donc d'après le th des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f_6 = 1}$

III

$$f(x) = x\,E(x)$$

1. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} E(x) = -1$

donc par produit $\lim\limits_{0^+} f = 0$ et $\lim\limits_{0^-} f = 0$

donc finalement $\lim\limits_{0} f = 0$ et $f(0) = 0$ donc f continue en 0.

2. $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} E(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} E(x) = 0$

$\xrightarrow{\text{produit}}$ $\lim\limits_{1^+} f = 1$; $\lim\limits_{1^-} f = 0$

On déduit que f n'est pas continue en 1

IV

$\forall x > 1$; $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{3x+1} = \dfrac{1}{4}$

donc finalement $\lim\limits_{1^+} f = \frac{1}{4}$; $\lim\limits_{1^-} f = \frac{1}{4}$ et $f(1) = \frac{1}{4}$

donc f continue en $x = 1$

V $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 3$; $x \in \mathbb{R}$.

1) f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x$

$= 12x(x^2 - 2x - 3)$

Soit $P(x) = x^2 - 2x - 3$

$\Delta = 16$ donc P admet deux racines : $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

On déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-132	$\nearrow$	$+\infty$

(règle du trinôme)

d'après la règle du plus haut degré

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

$f(0) = 3$; $f(3) = -132$; $f(-1) = -4$

2) Sur $[0;3]$

f est continue car dérivable
f est strictement décroissante
$f(0) = 3$; $f(3) = -132$
et $0 \in [-132; 3]$

donc par th de la biject°

$\boxed{\text{il existe } \alpha \text{ unique dans } [0,3] \text{ tel que } f(\alpha) = 0.}$

A la calculatrice on a $\alpha \approx 0{,}38$

VI $u_0 = 0$; $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$

1. $u_1 = u_0 + 2$
$= 2$.

$u_2 = u_1 + 2 + 2$
$= 6$.

2. Testons les algos avec la valeur $n = 1$ pour calculer u_1

l'algo n° 1 renvoie : $0 + 2 + 2 = 4$
l'algo n° 2 renvoie : $0 + 0 + 2 = 2$

Par élimination on déduit que l'algo n° 2 est le seul juste.

3. a) On conjecture que (u_n) et croissante.

et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 \geq 0$ car $n \in \mathbb{N}$

donc on a bien $(u_n) \nearrow$.

b) On cherche a, b, c tels que $u_n = an^2 + bn + c$

de plus $u_0 = 0 \Leftrightarrow c = 0$
$u_1 = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$
$u_2 = 6 \Leftrightarrow 4a + 2b = 6$

On a finalement le système $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$ $L_2 - L_1$

donc $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

et finalement on a $u_n = n^2 + n$

④ a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = u_{n+1} - u_n$

$= u_n + 2n + 2 - u_n$

$= 2n + 2$

On reconnait alors que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de 1er terme $v_0 = 2$.

b) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= \frac{v_0 + v_n}{2}(n+1)$ par th de somme des termes d'une suite arithmétique

$= \frac{2 + 2n+2}{2}(n+1) = (n+2)(n+1)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$= \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \cancel{u_3} - \cancel{u_2} + \dots \cancel{} + u_{n+1} - \cancel{u_n}$

$= u_{n+1} - u_0$

Donc finalement $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = u_{n+1} - u_0$

donc $u_{n+1} = S_n + u_0$

$= (n+2)(n+1)$

et donc par changement d'indice $\boxed{u_n = n(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque : cela correspond bien à la conjecture du 3b.

Devoir de Mathématiques N^o 3 (2 h)

1 ———— (6 points)

Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$ en -2^-.

$f_2(x) = x^3 - x^2\sqrt{x}$; en $+\infty$.

$f_3(x) = (-3x^2+5x-11)^{111}$; en $+\infty$

$f_4(x) = \dfrac{x^5+4x^2+3\pi}{5-x^2}$; en $-\infty$.

$f_5(x) = \dfrac{\sin((x-1)^2)}{x-1}$; en 1

$f_6(x) = \dfrac{\cos(3x)+x}{x+2}$; en $-\infty$

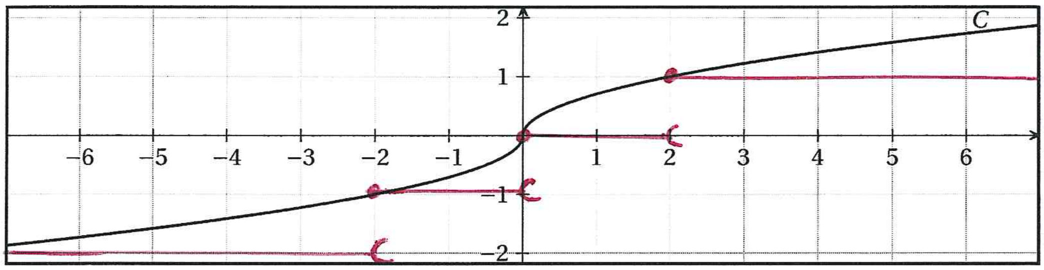
2 ———— (2 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x.
(On rappelle que $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x)

1. f est-elle continue en 0 ? (justifiez)
2. f est-elle continue en 1 ? (justifiez)

3 ———— (1 point)

On considère la fonction f dont la représentation graphique figure ci-dessous. Soit E la fonction partie entière. Representer graphiquement la fonction $E(f)$ de manière sommaire sur le graphique suivant. On ne demande aucune justification.



4 ———— (2 points)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\[2ex] \dfrac{2x-1}{3x+1} & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 1 ?

5 ———— (2 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 3$

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f, étudiez son signe et dresser le tableau de variations de f (limites comprises).