DS 4 - mathématiques. TS

I **1** $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

$1-x^2 = (1-x)(1+x)$ donc le signe est donné par

x		-1		$+1$	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc $\forall x \in]-1;1[$, $1-x^2 > 0$

et donc par th $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable et $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

finalement f est dérivable et

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} - (1-x).\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-(1-x^2) - (1-x).x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1+x^2-x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $N(x) = 2x^2 - x - 1$
$= (x-1)(2x+1)$

On déduit donc le tableau de variation de f

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

x	-1		$-1/2$		1
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

② Dérivabilité en -1 : Soit $t(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ $\quad x \neq -1$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1}$$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{(1-x)}\sqrt{1+x}}{1+x}$$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

donc $\lim\limits_{x \to -1} t(x) = +\infty$ (par quotient)

donc f non dérivable en -1 mais il y a en -1 une demi-tangente verticale

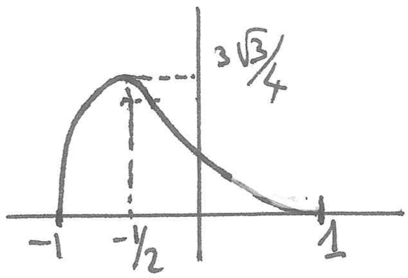
③ Dérivabilité en 1 :

Soit $t(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\sqrt{1-x^2}$

donc $\lim\limits_{1} t = 0$ donc f dérivable en $x=1$ et $f'(1)=0$

En 1, on a une tangente horizontale.

④ On a le graphe suivant :



II • $f_1(x) = \dfrac{5}{(x^2+9)^4}$

$\forall x \in D;\quad f_1'(x) = \dfrac{-4 \times 5 \times 2x}{(x^2+9)^5} = \dfrac{-40x}{(x^2+9)^5}$

• $f_2(x) = \sin(x^2+1)$

$\forall x \in D;\quad f_2'(x) = 2x\cos(x^2+1)$

• $f_3(x) = \left(\dfrac{7x-5}{x^4+2}\right)^3$

$f_3'(x) = 3\left(\dfrac{7x-5}{x^4+2}\right)^2 \dfrac{(x^4+2)(7)-(7x-5).4x^3}{(x^4+2)^2}$

$= 3.\left(\dfrac{7x-5}{x^4+2}\right)^2 \dfrac{-31x^4+20x^3+14}{(x^4+2)^2}$

• $f_4(x) = \sqrt{x^2-5x+7}$

$\forall x \in D;\quad f_4'(x) = \dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+7}}$

III $P(z) = z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i.$

1 $P(i) = i^3-(2+i)i^2+2(1+i)i-2i$

$= -i+2+i+2i-2-2i$

$= 0$

donc i racine de P.

2 Cherchons $a,b,c \in \mathbb{R}$ avec $P(z) = (z+i)(az^2+bz+c)$

On a $(z-i)(az^2+bz+c) = az^3+z^2(b-ia)+z(c-ib)-ic$

donc par identification :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b-ia = -(2+i) \\ c-ib = 2(1+i) \\ -ic = -2i \end{cases}$$

On déduit $\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = -2 - i + i = -2 \end{cases}$

ainsi $P(z) = (z-i)(z^2 - 2z + 2)$

③ $P(z) = 0 \iff z = i$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

et $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ on a deux solutions complexes :

$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

ainsi les racines de P sont $\{i ; 1-i ; 1+i\}$

IV $z_1 = \frac{3-5i}{1+i} = \frac{(3-5i)(1-i)}{2} = \frac{-8-8i}{2} = -4-4i$

$z_2 = (2+i)(2-3i)^2$

$= (2+i)(-5-12i)$

$= 7 - 29i$

V • $1 - 2z = 3iz + 5 - 2i$

$\iff z(2+3i) = 2i - 4$

$\iff z = \frac{2i-4}{2+3i} \iff z = \frac{(2i-4)(2-3i)}{13} = \frac{-2+16i}{13}$

• $(3+i)\bar{z} = (1-5i)z$ (E)

Soit $z = x + iy$ avec $x ; y \in \mathbb{R}$

(E) $\iff (3+i)(x-iy) = (1-5i)(x+iy)$

$\iff 3x + y + i(x - 3y) = x + 5y + i(y - 5x)$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} 3x+y = x+5y \\ x-3y = y-5x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=0 \\ 6x-4y=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 5x \quad\quad =0 \end{cases} \quad 2L_2-L_1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad S=\{0\}.$$

VI On a $\left.\begin{array}{l} f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\pi/2+1} \\ g(\pi/2) = \sqrt{\pi/2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se touchent en $\frac{\pi}{2}$.

Vérifions si le coeff dir de la tangente est égal.

C'est-à-dire : A-t-on $g'(\pi/2) = f'(\pi/2)$

f et g dérivables et $f'(x) = \cos x \sqrt{x+1} + \sin x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

donc $f'(\pi/2) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi/2+1}}$ et $g'(\pi/2) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi/2+1}}$

$f'(\pi/2) = g'(\pi/2) \Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune en $+\frac{\pi}{2}$.