$\boxed{\text{DS 5}}$

13 nov 2015

I $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$; $x \in I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$= \sin x \, (\cos x)^{-3}$

$= - \underbrace{(-\sin x)(\cos x)^{-3}}_{u'u^{-3}}$ donc $F_1(x) = - \dfrac{(\cos x)^{-2}}{-2} + K$; $K \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F_1(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + K \ ; \ K \in \mathbb{R}}$$

$f_2(x) = (1-x^2)(x^3 - 3x + 1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

$= -\dfrac{1}{3} \underbrace{(3x^2 - 3)(x^3 - 3x + 1)^3}_{u'u^3}$

donc $F_2(x) = -\dfrac{1}{3} \dfrac{(x^3 - 3x + 1)^4}{4} + K$

donc $\boxed{F_2(x) = -\dfrac{1}{12} (x^3 - 3x + 1)^4 + K}$

II $f(x) = x - \dfrac{1}{x^3}$, $x > 0$.

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^{-2}}{-2} + K \in \mathbb{R}$

donc $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + K$

mais $F(1) = -1 \iff \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + K = -1$

$\iff K = -2$

donc $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} - 2}$.

III $h_1(x) = e^{x^2-3x}$; $x \in \mathbb{R}$

alors $h_1'(x) = (x^2-3x)' e^{x^2-3x}$

$$= \boxed{(2x-3)\, e^{x^2-3x}}$$

$h_2(x) = (x+1)e^{-x+3}$

$h_2'(x) = (x+1)' e^{-x+3} + (x+1)(-x+3)' e^{-x+3}$

$$= e^{-x+3} + (x+1)(-1)e^{-x+3}$$

$$= e^{-x+3}(1-(x+1)) = \boxed{-x\, e^{-x+3}}$$

IV $g_1(x) = \dfrac{e^{3x}}{2x}$

$$= \frac{e^{3x}}{3x} \times \frac{3}{2}$$

Donc soit $X = 3x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \text{ par th} \end{array}\right\} \overset{\text{par composée}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = +\infty}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g_1 = +\infty}$

$g_2(x) = e^{2x} - e^x$

$$= e^x(e^x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x-1) = +\infty$$

donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g_2 = +\infty}$

V $\quad f(x) = x e^x$ sur $\mathbb{R}$

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\Big\}$ $\xrightarrow{\text{par produit}}$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0}$ par th de croissance comparée.

2 $f'(x) = (x e^x)'$

$= e^x + x e^x \quad = (1+x) e^x$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1+x$.

d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

VI $\quad \mathcal{E}_1 = \{ M(z) \;/\; |z - 2 + i| = |z| \}$

Soit $A(2-i)$ alors $\quad M(z) \in \mathcal{E}_1 \iff |z - z_A| = |z|$

$\iff AM = OM$

$\iff M$ point de la médiatrice OA

donc $\boxed{\mathcal{E}_1 = \text{médiatrice de } [OA]}$.

$\mathcal{E}_2 = \left\{ M(z) \;/\; \arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \;(\pi) \right\}$

Soit $A(i)$; $B(-1)$ alors $\quad M \in \mathcal{E}_2 \iff \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \;(\pi)$

$\iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \;(\pi)$

On déduit donc que $\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } A \text{ et } B}$.

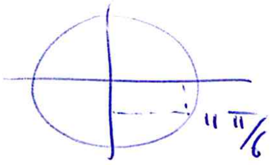
VII

$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

$|z_1|^2 = 6 + 2 = 8 \Longrightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$

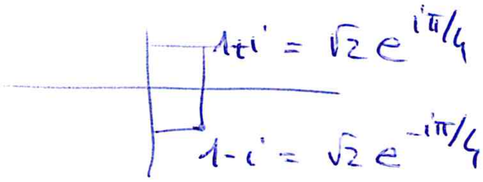
donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$



$= \boxed{2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}}$

$z_2 = \dfrac{1+i}{1-i}$



$= \dfrac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}}$

$= \underbrace{\boxed{e^{i\pi/2}}}_{\text{forme exp.}} = i$

$z_3 = -3i\, e^{i\pi/4} = 3 e^{i\pi} e^{i\pi/2} e^{i\pi/4}$

$= \boxed{3\, e^{7i\pi/4}}$

VIII $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

① $z^2 = 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} - (2-\sqrt{2})$

$= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$= \boxed{2\sqrt{2}(1-i)}$ (forme algébrique)

② $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

donc $z^2 = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} \Longrightarrow \boxed{z^2 = 4e^{-i\pi/4}}$

③ On déduit $|z|^2 = 4$ donc $|z| = 2$

et $\arg(z^2) = -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

donc $\arg z^2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad 2\arg z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad \arg z = -\frac{\pi}{8} + k\pi$

donc $\arg z = -\frac{\pi}{8} \ (2\pi)$ ou $\arg z = \frac{7\pi}{8} \ (2\pi)$

mais d'après l'expression de z : $\operatorname{Re}(z) < 0$

donc il est impossible d'avoir $\arg z = -\frac{\pi}{8} \ (2\pi)$.

finalement $\boxed{\arg z = \frac{7\pi}{8} \ (2\pi)}$