DS n°6.

I 1) $z_M = 2e^{-i\pi/3}$

a) $z_M = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 - i\sqrt{3}$

b) $z_{M'} = -iz_M$

$= -i(1-i\sqrt{3})$

$= -i - \sqrt{3}$

$= -\sqrt{3} - i$

et $|z_{M'}| = |-iz_M|$

$= |-i| \times |z_M| = |z_M| = 2.$

$\arg(z_{M'}) = \arg(-iz_M) = \arg(-i) + \arg(z_M) \quad (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2} + \arg(z_M) \quad (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

$= -\frac{5\pi}{6} \quad (\pi)$

finalement : $\boxed{|z_{M'}| = 2 \ ; \ \arg(z_{M'}) = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)}$

2) a) $z_M = x + iy$

I milieu de [AM] $\Longrightarrow z_I = \frac{z_A + z_M}{2}$

$= \frac{1+x+iy}{2}$

$= \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}.$

b) $z_{M'} = -iz_M$

$= -i(x+iy) = -ix + y$ donc $z_{M'} = y - ix.$

c) On a $I\left(\frac{1+x}{2};\frac{y}{2}\right)$; $B(0;1)$ et $M'(y;-x)$

d) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{1+x}{2}\\ y/2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM'}\begin{pmatrix}y\\ -x-1\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BM'} = y\times\frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}(-x-1)$

$$= \frac{1}{2}y(1+x) - \frac{1}{2}y(1+x) = 0$$

donc $(OI)\perp(BM')$ donc (OI) est la hauteur issue de O du triangle OBM'.

e) On a $BM'^2 = y^2 + (-x-1)^2$

$$= y^2 + (x+1)^2$$

et $OI^2 = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((1+x)^2 + y^2\right) = \frac{1}{4}BM'^2$

finalement $BM'^2 = 4OI^2$ donc $\boxed{BM' = 2OI.}$

II) $f(x) = (1-x)e^x$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\Big\}$ par produit $\Longrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = -\infty}$.

$f(x) = e^x - xe^x$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par th

donc par somme $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = 0}$

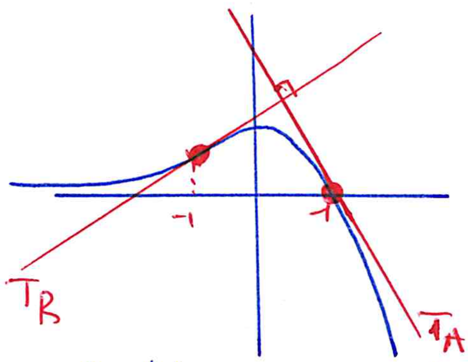
② f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -e^x + (1-x)e^x$$
$$= -x e^x$$

or sur $\mathbb{R}$: $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x$

d'où le tableau de variations de f :

x		0	
$f'(x)$	$+$	|	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow -\infty$



③ L'équation d'une tangente au point d'abscisse a est

$T : \; y = f'(a)(x-a) + f(a)$

on a donc $T_A : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\iff y = -e(x-1)$ donc $T_A : y = -ex + e$.

et $T_B : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$\iff y = e^{-1}(x+1) + 2e^{-1} \longrightarrow T_B : y = e^{-1}x + 3e^{-1}$

donc $\vec{u_A}\begin{pmatrix}1\\-e\end{pmatrix}$ vecteur directeur de T_A et $\vec{u_B}\begin{pmatrix}1\\e^{-1}\end{pmatrix}$ vecteur dir de T_B.

$\vec{u_A} \cdot \vec{u_B} = 1 + (-e)(e^{-1}) = 1 - 1 = 0$

donc $\vec{u_A} \perp \vec{u_B} \longrightarrow \boxed{T_A \perp T_B.}$

III • l'algo n°2 ne marche pas ; on s'arrête quand l'encadrement est petit
il faut donc faire un tant que $(b-a) > 10^{-p}$ (tant que c'est pas précis, on continue)

- l'algo 3 ne marche pas :

ligne 5 et 6 si $f(a)f(c) > 0$ alors $b \leftarrow c$

En effet si $f(a)f(c) > 0$ c'est que la solution n'est pas dans l'intervalle $[a, c]$ mais dans l'intervalle $[c, b]$ il faut donc changer la recherche de l'intervalle $[a, b]$ à l'intervalle $[c, b]$ (qui est plus petit) il faut donc faire $a \leftarrow c$ et non $b \leftarrow c$.

- C'est donc **l'algo 1 qui est le bon**.

② p sert à fixer la précision de l'encadrement.