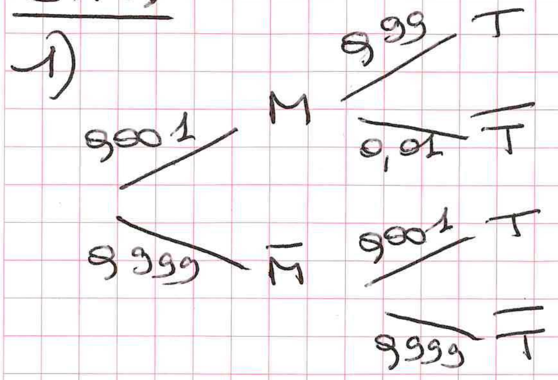
Ex 1 :

1)



2) M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers de la population.
D'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap T)$$
$$= 0,001\times 0,99 + 0,999\times 0,001$$
$$= \boxed{1,989\times 10^{-3}}$$

3) $P_T(M) = \dfrac{P(T\cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,001\times 0,99}{1,989\times 10^{-3}} = \dfrac{0,99}{1,989} \approx 0,498$

La probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif est presque de 0,5 soit une chance sur deux environ. L'affirmation est fausse

Ex 2 : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $A_n(z_n)$

1) ⓐ $z = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ $|z|^2 = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

donc $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right)$

soit $z = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6}}$

ⓑ on veut montrer par récurrence que $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$
$n \in \mathbb{N}$

* initialisation pour $n=0$

$z_0 = 1$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 \times e^{i \times 0 \times \pi/6} = 1$ vrai pour $n=0$

* hérédité : je suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$
tel que $z_k = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \times e^{ik\pi/6}$

alors $z_{k+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times z_k = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k e^{ik\pi/6}$

soit $z_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} e^{i(k+1)\pi/6}$

vrai au rang $(k+1)$

* conclusion : vrai pour $n=0$, héréditaire
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = \left(\sqrt{3}/2\right)^n e^{in\pi/6}$

ⓒ $A_0(z_0)$ avec $z_0 = 1$ $A_1(z_1)$ avec $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6}$
$A_2(z_2)$ avec $z_2 = \frac{3}{4} e^{i\pi/3}$

ⓓ O, A_0 et A_n alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}) = 0 \ (\pi)$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = 0 \ (\pi)$

$\Leftrightarrow \arg(z_n) - \arg(z_0) = 0 \ (\pi)$ or $\begin{cases} \arg z_0 = 0 \\ \arg z_n = \frac{n\pi}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = 0 \ (\pi)$

$\Leftrightarrow$ n est un multiple de 6

$n = 0, 6, 12, 18, \dots$

2) Soit $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ⓐ $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n - \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_{n-1}$ $n \geq 1$

$= \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot (z_n - z_{n-1})$

ⓑ donc $d_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})\right|$

$n \geq 1$ $= \left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| \times |z_n - z_{n-1}|$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times d_{n-1}$

Alors (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$

de premier terme $d_0 = |z_1 - z_0|$

$z_1 - z_0 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$|z_1 - z_0|^2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

donc $|z_1 - z_0| = \frac{1}{2}$ $\boxed{d_0 = 1/2}$

et $\boxed{d_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ⓒ $\boxed{d_n = A_nA_{n+1}}$

3) $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right)$

$= 1/2 \times \dfrac{1 - (\sqrt{3}/2)^n}{1 - \sqrt{3}/2}$

$= \frac{1}{2} \times \dfrac{1 - (\sqrt{3}/2)^n}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1 - (\sqrt{3}/2)^n}{2 - \sqrt{3}}$

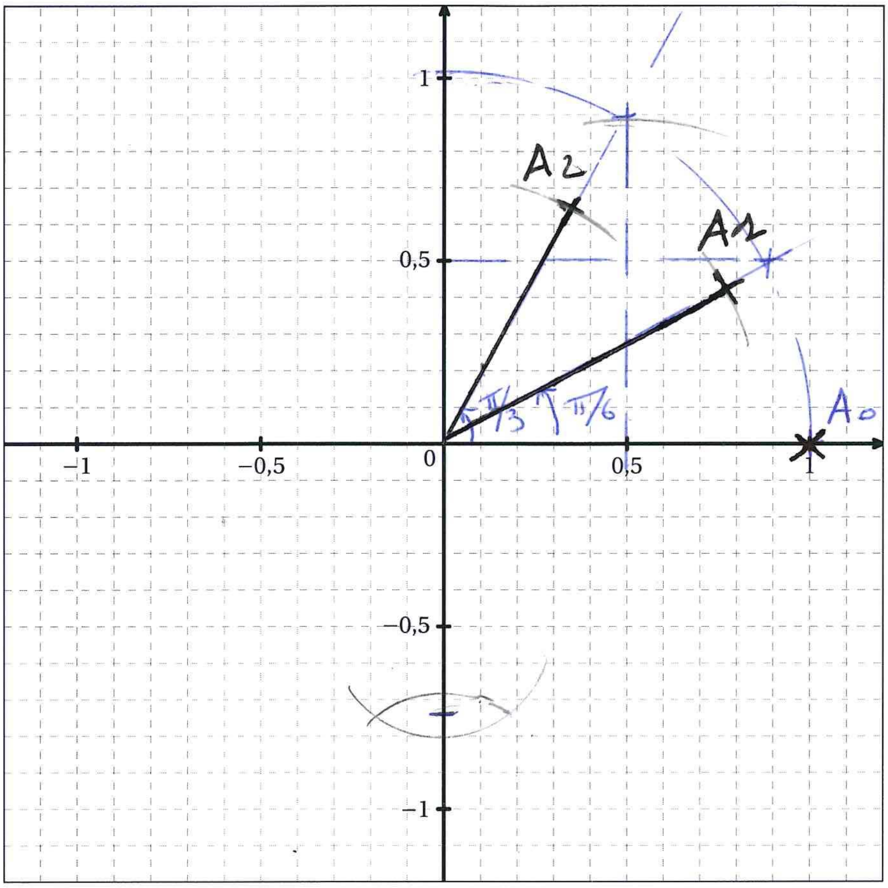
$-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$

par somme et quotient $\lim_{n \to +\infty} L_n = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ $(\sim 3{,}73)$

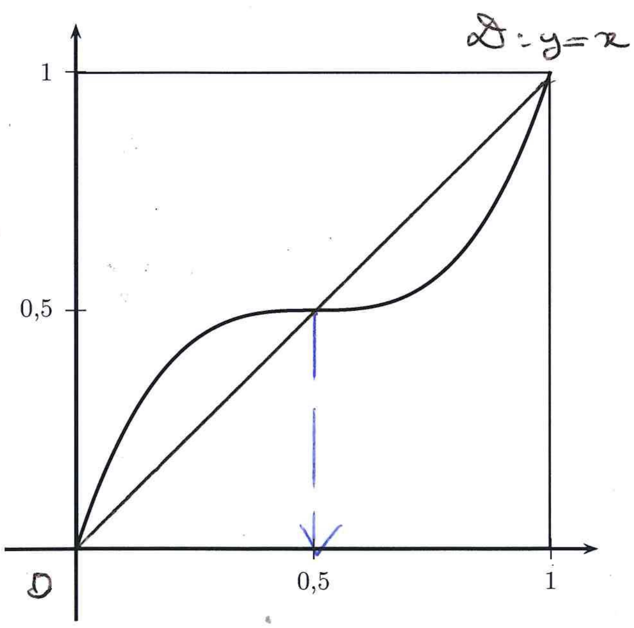
A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : .... PRENOM : .... Classe : ....

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3
Courbe représentative de la fonction f_1



Ex 3 : **Partie A :** $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

fonction polynôme défini sur $[0;1]$

a) • $f_1(0) = 0$ $\quad f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$

• f_1 continue sur $[0;1]$, c'est un polynôme de degré 3

• $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x-1)^2$

$f_1'(x) \geqslant 0$ donc f croissante sur $[0;1]$

f_1 vérifie les 4 propriétés donc c'est bien une fonction retouche.

b) On trace $\mathcal{D} : y = x$

graphiquement $f_1(x) \leq x$ pour $x = 0$ et pour $0{,}5 \leq x \leq 1$

Pour $0{,}5 < x < 1$ la nuance est éclaircie

pour $0 < x < 0{,}5$ la nuance est assombrie

2) $f_2(x) = \ln(1 + (e-1)x)$ sur $[0;1]$

f_2 est une fonction retouche

$g_2(x) = f_2(x) - x$

ⓐ g dérivable sur $[0;1]$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $[0;1]$

$$g_2'(x) = \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{(e-1) - (1+(e-1)x)}{1+(e-1)x}$$

$$\boxed{g_2'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1+(e-1)x}}$$

ⓑ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (e-1)x \leq e-1$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + (e-1)x \leq e$

donc $g_2'(x)$ est du signe de $(e-2) - (e-1)x$. $\quad -(e-1) < 0$

x	0		$\frac{e-2}{e-1}$		1
$g_2'(x)$		$+$	0	$-$	

alors g_2 est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{e-2}{e-1}\right]$

puis strictement décroissante sur $\left[\frac{e-2}{e-1} ; 1\right]$

Donc g_2 admet un maximum en $x = \frac{e-2}{e-1}$

$g_2\left(\frac{e-2}{e-1}\right) = \ln\left(1+(e-2)\right) - \frac{e-2}{e-1} = \ln(e-1) - \frac{(e-2)}{(e-1)} \approx 0{,}12$

c)

x	0		$\frac{e-2}{e-1}$		1
$g_2(x)$	0	$\nearrow$	$g_2\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$	$\searrow$	0

sur $\left[0;\frac{e-2}{e-1}\right]$ g continue
g strictement croissante
$g(0)=0$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \approx 0{,}12$

sur $\left[\frac{e-2}{e-1};1\right]$ g continue
g strictement décroissante
$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \approx 0{,}12$ et $g(1)=0$

D'après la conséquence du théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $g(x)=0{,}05$ admet une seule solution α sur $\left[0;\frac{e-2}{e-1}\right]$ et une seule solution β sur $\left[\frac{e-2}{e-1};1\right]$
donc 2 solutions au total sur $[0;1]$, α et β
avec $\alpha < \beta$

On admet que $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B : 1) L'algorithme affiche le nombre de nuances perceptibles visuellement par balayage par centième de l'intervalle $[0;1]$

2) $|f_2(x) - x| = |g_2(x)| = g_2(x)$ puisque $g_2(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$

d'après le tableau de variations de g_2
puisque $g(\alpha) = g(\beta) = 0{,}05$
on a $g_2(x) \geqslant 0{,}05$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$

$c = (0{,}85 - 0{,}09) \times 100 + 1 = 76 + 1 = 77$

L'algorithme affichera 77

Ex 4 : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

Partie A :

$N = 2$

K	W	U	V
0	$\times$	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

Partie B : 1) (a) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{2u_n + v_n}{3}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$= \dfrac{1}{12}\left(3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)\right)$

$= \frac{1}{12}(3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n)$

$= \frac{1}{12}(5v_n - 5u_n) = \boxed{\dfrac{5}{12}(v_n - u_n)}$

(b) $w_n = v_n - u_n$ $(n \in \mathbb{N})$

$\begin{cases} w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n) = \dfrac{5}{12} w_n \\ w_0 = v_0 - u_0 = 8 \end{cases}$

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $5/12$ de 1er Terme $w_0 = 8$

donc $\boxed{w_n = 8 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

2) (a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

or $w_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

(u_n) est croissante

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4} = -\dfrac{w_n}{4}$

donc $v_{n+1} - v_n < 0$

(v_n) est décroissante

ⓑ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} (u_n) \text{ croissante et } u_0=2 \text{ donc } u_n \geq 2 \\ (v_n) \text{ décroissante et } v_0=10 \text{ donc } v_n \leq 10 \end{cases}$

or $w_n = v_n - u_n$ et $w_n > 0$ donc $v_n > u_n$

d'où $10 \geq v_n > u_n \geq 2$

On a donc $\underline{u_n \leq 10 \text{ et } v_n \geq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}}$

ⓒ $\left.\begin{matrix}(u_n) \text{ croissante et majorée} \\ (v_n) \text{ décroissante et minorée}\end{matrix}\right\}$ donc (u_n) et (v_n) sont $\underline{\text{convergentes}}$.

3) $-1 < \frac{5}{12} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$

par produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$ or $w_n = v_n - u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$

4) $\underline{t_n = 3u_n + 4v_n \qquad (n\in\mathbb{N})}$

$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = (2u_n + v_n) + (u_n + 3v_n)$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$

donc (t_n) est une suite constante

or $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 46$ alors $\boxed{t_n = 46 \quad \forall n\in\mathbb{N}}$

$\begin{cases} w_n = v_n - u_n \iff v_n = w_n + u_n \iff 4v_n = 4w_n + 4u_n \\ t_n = 3u_n + 4v_n \iff 4v_n = t_n - 3u_n \end{cases}$

donc $4w_n + 4u_n = t_n - 3u_n$

$\Rightarrow 7u_n = t_n - 4w_n$

$\Rightarrow 7u_n = 46 - 4w_n$

$\Rightarrow u_n = \frac{46}{7} - \frac{4}{7}w_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{7}w_n = 0$

Par Somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{46}{7} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$

Ex 5 : $f_k(x) = kx\,e^{-kx}$ $(k>0)$

f_k définie dérivable sur $\mathbb{R}$

Partie A : $k=1$ $\quad f_1(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}$ $\quad x \neq 0$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées)

par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}$ L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$

2) $f_1'(x) = e^{-x} + x \times e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(1-x)$

$e^{-x} > 0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B : 1) $f_k(0) = k \times 0 \times e^0 = 0 \quad \forall k \in$

donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par l'origine O

2) ⓐ $f'_k(x) = k e^{-kx} + kx\, e^{-kx} \times (-k)$

$= k e^{-kx}(1 - kx) = \boxed{k(1-kx)e^{-kx}}$

ⓑ $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$ donc $f'_k(x)$ est du signe de $(1-kx)$

x	$-\infty$		$1/k$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	

$-k<0$

alors f_k strictement croissante sur $]-\infty ; 1/k]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{k} ; +\infty[$

Donc f_k admet un maximum en $x = 1/k$

et $f_k(1/k) = k \times \frac{1}{k} \times e^{-k \times 1/k} = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$

ⓒ pour f_a le maximum est en $\frac{1}{a}$

pour f_2 le maximum est en $1/2$

or $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ donc $a > 2$ puisque $x \mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

ⓓ $y = f'_k(0) \times (x - 0) + f_k(0)$

$\boxed{y = kx}$ équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ en O

ⓔ pour $\mathcal{C}_b$, la tangente a pour équation $y = bx$

graphiquement, on lit $\boxed{b \simeq 3}$