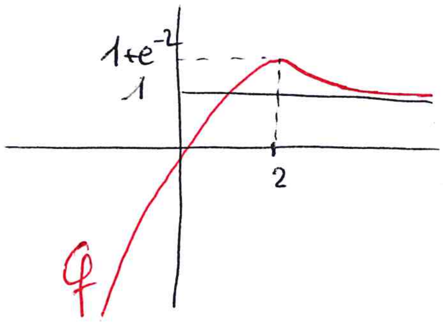
DS 11

I **1**



2 **a** $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$

donc $g(2) = \int_0^2 f(t)dt$ est l'aire de la zone délimitée par $\mathcal{C}_f$ et les droites $y=0$, $x=0$, $x=2$

b $g(2)$ est une aire $\Rightarrow g(2) \geqslant 0$

Sur $[0;2]$; $f(t) \leqslant 1+e^{-2}$

donc par intégration de l'inégalité $\quad g(2) \leqslant \int_0^2 1+e^{-2} dt$

$\rightarrow \quad g(t) \leqslant (1+e^{-2}) \times \int_0^2 1 \cdot dt$

$\rightarrow \quad g(t) \leqslant (1+e^{-2}) \times 2 \leqslant 2,5$

donc $\quad 0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.

3 **a** Sur $[2;+\infty[$ $\quad f(t) \geqslant 1$ d'après le tableau de variations

donc par intégration avec les bornes dans l'ordre, on a

$\int_2^x f(t)dt \geqslant \int_2^x 1\, dt$ c.à.d $\int_2^x f(t)dt \geqslant x-2$

Alors $\int_0^x f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt$

et $\int_0^2 f(t)dt \geq 0$ et $\int_2^x f(t)dt \geq x-2$ $\xrightarrow{\text{par somme}}$ $\int_0^x f(t)\,dt \geq x-2$

c.à.d $g(x) \geq x-2$

(b) $\lim_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$ donc par th de comparaison $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

(4) par th, g est une primitive de f donc

$g'(x) = f(x)$ d'où le tableau de variations de f :

et $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(II) (1)(a) $(G(x))' = \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' = x\,e^{x^2} = g(x)$

donc G est une primitive de g.

(b) $I_1 = \int_0^1 g(t)dt = [G]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

(c) $H_n(x) = x^{n+1}G(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n'(x) = (n+1)x^n G(x) + x^{n+1}g(x)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^{n+1}e^{x^2}}{2}\right)' = \frac{(n+1)}{2}x^n e^{x^2} + x^{n+2}e^{x^2}$

par intégration on a $\left[\frac{x^{n+1}e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{n+1}{2}I_n + I_{n+2}$

$\Leftrightarrow \frac{e}{2} = \frac{n+1}{2}I_n + I_{n+2}$

donc $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$

(d) $I_3 = \frac{1}{2}$; $I_5 = \frac{1}{2}e - 1$

(2) On obtient I_{21}

(3) (a) $\forall x \in [0,1]$; $x^n e^{x^2} \geqslant 0$ par produit

donc par ~~intégration de l'inégalité~~ th de positivité : $I_n \geqslant 0$

(b) $\forall x \in [0,1]$ $\quad x < 1$

$$\Rightarrow x^{n+1} \leqslant x^n \quad (\times x^n \text{ avec } x > 0)$$

$$\Rightarrow x^{n+1} e^{x^2} \leqslant x^n e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{x^2} dx \quad \text{(par intégration de l'inégalité)}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} \leqslant I_n \qquad \text{donc } (I_n) \downarrow$$

(c) $(I_n) \downarrow$ et minorée 0 donc (I_n) converge vers $l \geqslant 0$.

(4) Méthode 1 : $\forall x \in [0,1]$: $e^{x^2} \leqslant e$

donc $\quad x^n e^{x^2} \leqslant x^n$

et par intégration $\quad I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$$\Rightarrow I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

donc par th des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Méthode 2 : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{(n+1)I_n}{2}$

$$\iff I_n \frac{(n+1)}{2} = \frac{1}{2}e - I_{n+2}$$

$$\iff I_n = \frac{e - 2I_{n+2}}{n+1}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} e - 2I_{n+2} = e - 2\ell$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

$\xrightarrow{\text{par quotient}} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-2I_{n+2}}{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Méthode 3 : Par l'absurde, on sait que $\ell \geq 0$

donc si $\ell > 0$

alors $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} I_n = +\infty$ (par produit)

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = -\infty$ ce qui est contradictoire !

donc $\ell = 0$.