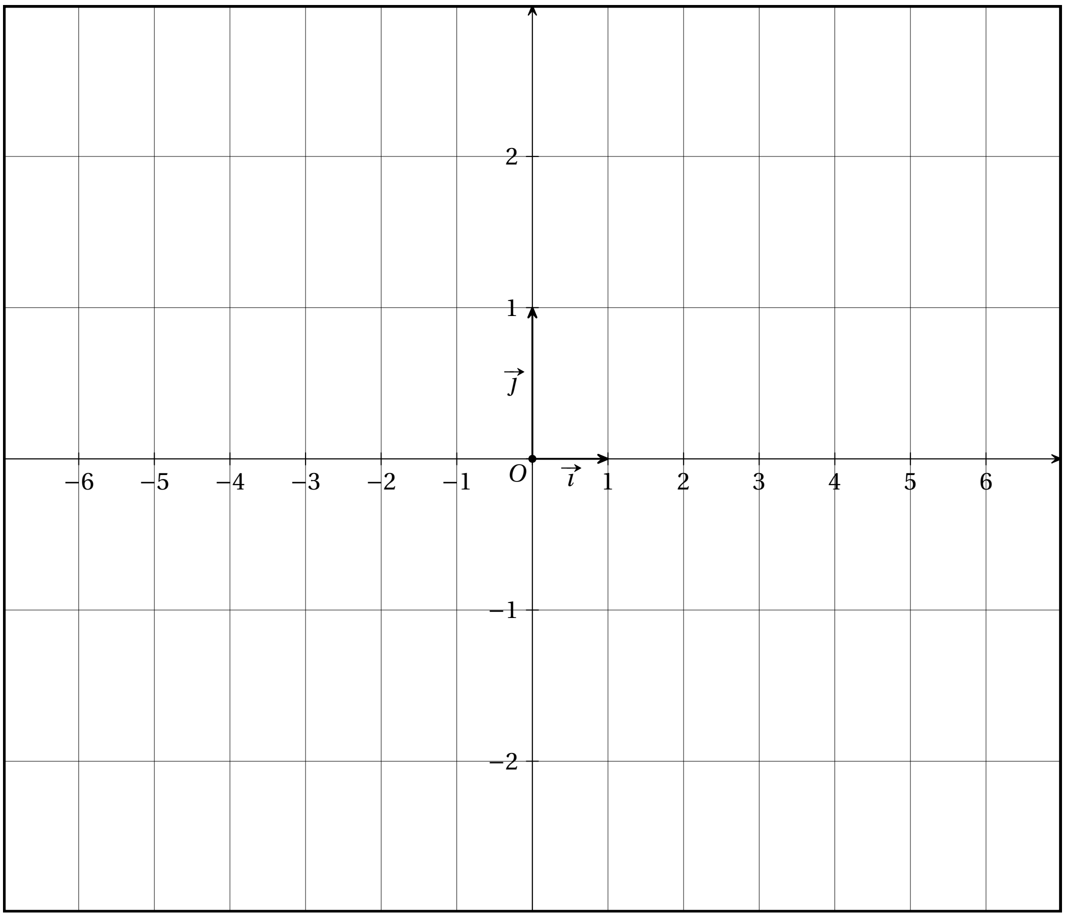
Devoir de Mathématiques N^o 11 (1h30)

1 On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathcal{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. a) Interpréter graphiquement $g(2)$.
   b) Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2{,}5$.
3. a) Soit x un réel supérieur à 2.
   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.
   b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.



2 On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

   b) En déduire la valeur de I_1.

   c) Pour tout entier n on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par

   $$H_n(x) = x^{n+1}G(x)$$

   Exprimer la dérivée $H_n'(x)$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

   $$I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n.$$

   d) Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

   Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la valeur de ℓ.

3 Sur le cube ci-joint, tracer la section en laissant apparaître les traits de construction ou en donnant la propriété utilisée le cas échéant du cube par le plan IJK.