DS 12.

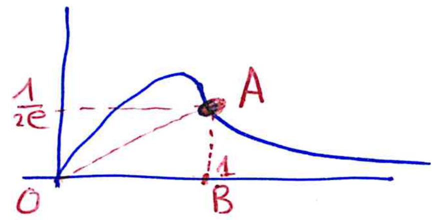
I A ① f est une primitive de f' donc $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = [f]_0^1$

$= f(1) - f(0)$

$\boxed{= \dfrac{1}{2e}}$.

② f étant une f° positive et les bornes étant dans l'ordre on déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire délimitée par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'éq $x=0$; $x=1$; $y=0$.

Ainsi en notant $B(1;0)$ et sachant que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $[OA]$ on déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \mathcal{A}(OAB)$



et $\mathcal{A}(OAB) = OB.BA.\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4e}$

finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}}$

B ① $x \geqslant 0$ et $x^2+1 > 0$ donc $\dfrac{x}{x^2+1} \geqslant 0$ (par quotient).

Etudions le signe de

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0 \quad \text{car } (x-1)^2 \geqslant 0 \text{ et } x^2+1>0$$

donc finalement $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{x^2+1} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

En conclusion, sur $\mathbb{R}_+$ $\boxed{0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}}$.

② Par produit avec $e^{-x} > 0$ on déduit

$$0 \leqslant \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leqslant \frac{e^{-x}}{2}$$

et donc par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre $(n \leq 2n)$

on a

$$0 \leq u_n \leq \int_n^{2n} \frac{e^{-x}}{2} dx$$

et $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \left[-e^{-x} \right]_n^{2n} = \frac{1}{2} \left(e^{-n} - e^{-2n} \right)$

finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)}$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$ donc par composée, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$

de m̂ $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n = -\infty$ donc par composée $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n} = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right) = 0$ et donc par th des Gendarmes

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

II) A) 1) $f(x) = x e^{-x^2}$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

$\left.\begin{array}{l} X = x^2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0 \text{ (croissance comparée)} \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

b) f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0$ $f'(x) = e^{-x^2} + x.(-2x)e^{-x^2}$

$$= e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$= 2e^{-x^2}\left(\frac{1}{2} - x^2\right)$$

$$= 2e^{-x^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right)$$

et sur $\mathbb{R}_+$: $2e^{-x^2} > 0$; $\frac{\sqrt{2}}{2} + x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\frac{\sqrt{2}}{2} - x$.

On déduit le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

et $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

$\frac{1}{\sqrt{2e}}$ est le maximum de f atteint en $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

② On sait que $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

donc par th $F(a) = \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a x e^{-x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^a \underbrace{-2x e^{-x^2}}_{u'e^u}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^a$$

$$= -\frac{1}{2} \left(e^{-a^2} - 1 \right)$$

et $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-a^2} = 0$ (par composée)

donc $\boxed{\lim\limits_{a \to +\infty} F(a) = \frac{1}{2} \text{ u.a.}}$

B ① ⓐ On sait que sur $[1; +\infty[$ f est décroissante

donc en particulier si $n \in \mathbb{N}^*$

et $n \leq t \leq n+1$ alors $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ (car $f \downarrow$)

et par intégration de cette inégalité entre n et $n+1$ on a

$$\underbrace{\int_n^{n+1} f(n+1)\,dt}_{= f(n+1)\int_n^{n+1} dt \;=\; f(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \underbrace{\int_n^{n+1} f(n)\,dt}_{= f(n)}$$

donc finalement $\boxed{f(n+1) \leq u_n \leq f(n)}$ $\forall n \geq 1$

ⓑ $\forall n \geq 1$ $\quad f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

et au rang suivant : $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$

donc en particulier $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$

donc $(u_n) \searrow$ à partir de $n \geq 1$

ⓒ $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc par th de positivité avec les bornes dans l'ordre $\int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq 0$ donc $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

donc $(U_n) \searrow$ et minorée donc (u_n) converge.

d'après 1 ⓐ $\quad f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

et on sait que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et d'après le th des Gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.a $\quad F(n) = \int_0^n f(t)\,dt$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)\,dt \quad \text{(Chasles)}$$

$$= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$