DS8

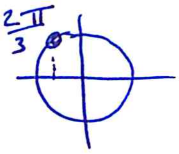
I ① ⓐ $z^2+z+1=0$.

$\Delta = -3 < 0$ donc on a 2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

ⓑ avec les notations précédentes on a $z_1 = j$

② $|z_1|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \implies |z_1| = 1$



et $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= e^{+2i\pi/3}$

donc $\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}}}$

③ ⓐ $j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3$

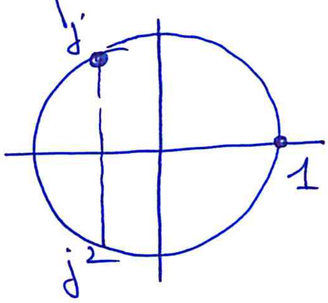
$= e^{2i\pi} = -1$

ⓑ comme j solution de $z^2+z+1=0$

alors $j^2+j+1=0$ donc $j^2 = -j-1$

④ En plaçant P, Q, R sur le cercle trigonométrique

on constate que PQR semble équilatéral.



Pour le vérifier, on peut calculer les longueurs.

$PQ = |z_Q - z_P| = |j-1| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$PR = |z_R - z_P| = |j^2-1| = |-j-2| = |j+2| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$

$QR = |z_R - z_Q| = |j^2 - j| = \underbrace{|j|}_{=1} \times \underbrace{|j-1|}_{=\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

donc on a bien PQR équilatéral.

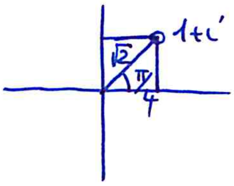
(II) $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(1) (a) $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = 8(1+i)$

$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = 4(1+i)^2 = +8i$

$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = +(1+i).i.4$

$= +4(-1+i)$

(c) 

donc $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \longrightarrow \boxed{\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4}}$

(d) $O(0)$; $A_0(16)$; $A_1(8+8i)$

$$\left.\begin{aligned} OA_1 &= |z_1| = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2} \\ A_0A_1 &= |z_1 - z_0| = |-8+8i| = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow OA_0A_1 \text{ isocèle en } A_1$$

On a $\overrightarrow{A_0A_1}\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA_1}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{A_0A_1}.\overrightarrow{OA_1} = -64+64 = 0$

donc OA_0A_1 rectangle en A_1.

Finalement OA_0A_1 rectangle isocèle en A_1

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2} z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right| . |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$

Donc (r_n) géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et premier terme $r_0 = 16$.

Alors par th $\forall n \in \mathbb{N}$; $r_n = 16 . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

et $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$ donc par th $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ donc (r_n) converge vers 0.

Les points A_n se rapprochent du centre O quand n tend vers $+\infty$.

(3) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2} z_n - z_n\right| = |z_n| \times \left|\frac{1+i}{2} - 1\right|$

$= r_n \times \left|-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}$

(b) $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

$= r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ (d'après (3a))

$= r_1 \times \frac{1-(\sqrt{2}/2)^n}{1-\sqrt{2}/2}$ (somme des termes d'une suite géométrique)

$= 16\sqrt{2} \times \frac{(1-(\sqrt{2}/2)^n)}{2-\sqrt{2}}$

(c) et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 16(2+\sqrt{2})}$