Devoir n° 1

I $f_1(x) = 3\sin x - 2\cos 2x$ alors $f_1'(x) = 3\cos x + 4\sin 2x$

$f_2(x) = x\cos(3x^2+2)$ alors $f_2'(x) = \cos(3x^2+2) - 6x^2\sin(3x^2+2)$

$f_3'(x) = x^2\cos x$ alors $f_3'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$.

II ① $f(x) = \sin x - x$

f est dérivable et $f'(x) = \cos x - 1$

or $\forall x \in \mathbb{R}_+ ;\quad -1 \leq \cos x \leq 1$ donc $f'(x) \leqslant 0$

donc f décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On déduit le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	0	$\searrow$

$f(0) = \sin 0 - 0 = 0$

② D'après le tableau de variations, pour tout $x \geqslant 0$

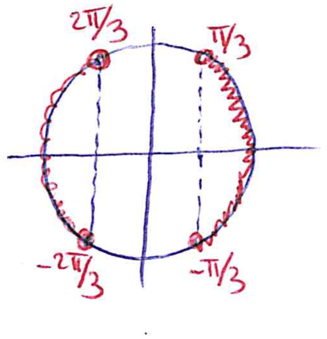
on a $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\sin x - x \leq 0$

donc $\sin x \leq x$.

III $4\cos^2 x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x \geqslant \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow |\cos x| \geqslant \dfrac{1}{2}$ d'où la résolution à l'aide du graphique



Sur $]-\pi ; \pi]$, on a

$$\boxed{S = \left]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]}$$

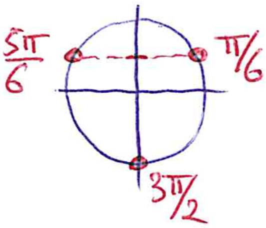
IV $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad (E)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 + X - 1 = 0 & (E') \\ X = \sin x \end{cases}$$

Résolution de (E') : $\Delta = 9$

donc $X = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$ ou $X = \dfrac{-1-3}{4} = -1$

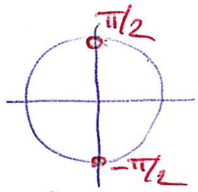
donc $(E) \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin x = -1$ sur $[0, 2\pi]$.



Sur $[0, 2\pi[$; $\boxed{S = \{\pi/6\ ;\ 5\pi/6\ ;\ 3\pi/2\}}$

V $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2k\pi}{6}$



$\cos X = 0$

Donc sur $[0, 2\pi]$ il y a 6 solutions : $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{6} ; \dfrac{3\pi}{2} ; \dfrac{11\pi}{6}\right.}$

VI ① $\sin x = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

donc $\sin^2 x = \dfrac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \dfrac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

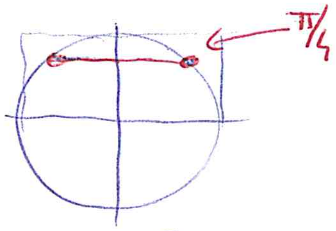
$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

ainsi $\boxed{\cos x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ (En effet $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \cos x \geq 0$)

② On a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

③ On a alors $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$



$\sin X = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc $2x = \frac{\pi}{4}$

et donc $\boxed{x = \frac{\pi}{8}}$

VII ① $u_0 = 1$

$u_1 = 4u_0 - 3\times 0 - 2 = 2$

$u_2 = 4u_1 - 3 - 2 = 8 - 3 - 2 = 3$

$u_3 = 4v_2 - 6 - 2 = 12 - 8 = 4$

Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = n+1$.

② Soit P_n cette propriété. Démontrons-la par récurrence.

Init : pour $n = 0$; $u_0 = 1$ donc P_0 vraie.

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

P_q vraie donc $u_q = q+1$.

alors $u_{q+1} = 4u_q - 3q - 2$

$= 4(q+1) - 3q - 2 = q+2$

donc P_{q+1} vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie, c'est-à-dire $u_n = n+1$.