DS n°3

I ① $u_n = \dfrac{4^n}{3^n - 5^n}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$= \frac{4^n}{5^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$$

$\left|\frac{4}{5}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$; li

$\left|\frac{3}{5}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

donc par quotient et produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

② $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad -1 \leq \sin(3n^2) \leq 1$

donc $\quad -1 - n \leq v_n \leq 1 - n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - n = -\infty$ donc par th de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

II $f_1(x) = \dfrac{4 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{4 - x}{(x-1)(x+1)}$

On a :

x		-1		$+1$	
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x \to -1} 4 - x = 5$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 1 = 0^-$ donc par quotient, $\lim\limits_{-1^+} f_1 = -\infty$.

et $\lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - 1 = 0^+$ donc par quotient, $\lim\limits_{-1^-} f_1 = +\infty$.

$f_2(x) = \dfrac{3x^3 - x^2}{x^3 - 3}$ est une fonction rationnelle donc par th $\lim\limits_{-\infty} f_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3}{x^3}$

$= 3$

III $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x + \sin x$.

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin^3(-x) + \sin(-x)$

$= (-\sin x)^3 - \sin x$

$= -\sin^3 x - \sin x = -f(x)$ donc f impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin^3(x+2\pi) + \sin(x+2\pi)$

$= \sin^3 x + \sin x = f(x)$ donc f est 2π périodique

② Il suffit donc d'étudier f sur $I=[0,\pi]$

f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\sin^2(x)\cos x + \cos x$

$= \cos x\,(3\sin^2 x + 1)$

Sur $I = [0,\pi]$ $3\sin^2 x + 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\cos x$.

On déduit le tableau de variation de f.

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Par symétrie (impaire) et périodicité on déduit alors la construction de $\mathcal{C}_f$.

IV 1) b) Par lecture graphique, on peut conjecturer que (u_n) est décroissante et converge vers $l \simeq 1$

2) a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$; $x > -2$

f dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}\left((x+2)4 - (4x-1)\right) = \dfrac{9}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ car c'est un carré, donc f est croissante sur $]-2;+\infty[$.

b) Notons pour $n \in \mathbb{N}$, P_n la ppté $u_n > u_{n+1} > 1$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisation : pour $n=0$; $u_0 = 5$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{19}{7}$

On a donc bien $u_0 > u_1 > 1$ donc P_0 vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

P_k vraie $\Rightarrow$ $u_k > u_{k+1} > 1$

donc $f(u_k) > f(u_{k+1}) > f(1)$ car f est croissante sur $]-2;+\infty[$

donc $u_{k+1} > u_{k+2} > 1$ $\Longrightarrow$ P_{k+1} vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est à dire $u_n > u_{n+1} > 1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant 1$ donc (u_n) est minorée.

Par th, on déduit que (u_n) converge vers une limite $l \geqslant 1$.

③ ⓐ Soit $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$; $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que (v_n) arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{u_n + 2}{4u_n - 1 - (u_n + 2)} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)}$$

$$= \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}.$$

On a donc $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc (v_n) arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$

ⓑ Par th, on déduit $v_n = v_0 + n r$

$$v_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $\dfrac{1}{v_n} = u_n - 1$ (par inverse)

et donc $u_n = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ainsi $u_n = 1 + \dfrac{1}{\frac{n}{3} + \frac{1}{4}}$

ⓒ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{4}\right) = +\infty$ donc par quotient et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

④ D'après le graphique, il semble clair que si $u_0 > 1$, $(u_n)\downarrow$ si $u_0 = 1$, (u_n) est stationnaire et si $u_n < 1$, $(u_n)\downarrow$

Ainsi (u_n) ne peut jamais être une suite croissante.

Ⓥ Soit P_n la ppté $\cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cdots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \dfrac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Initialisation :

Se rappeler que $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$

pour $n = 1$; $\dfrac{\sin a}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)} = \dfrac{2\cos(a/2)\sin(a/2)}{2\sin(a/2)} = \cos\frac{a}{2}$

donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}^*$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right) = \frac{\sin a}{2^k\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\times\cos\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)$$

(car P_k vraie)

$\sin\left(\frac{a}{2^k}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)$

$$= \frac{\sin a\times\cos\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)}{2^k\times 2\sin\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)}$$

$$= \frac{\sin a}{2^{k+1}\sin\left(\frac{a}{2^{k+1}}\right)}$$

donc P_{k+1} vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cdots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \dfrac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$

Devoir de Mathématiques N^o 3

0 Nom et prénom :

1 **(3 points)**
Déterminez la limite des suites suivantes dans le cas ou elle existe.

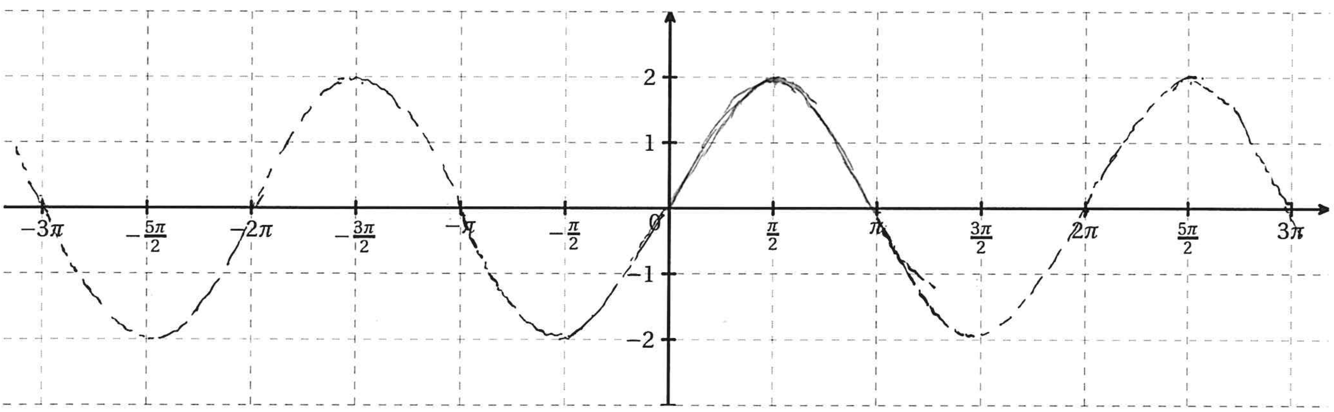
$u_n = \dfrac{4^n}{3^n - 5^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. | $v_n = \sin(3n^2) - n$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

2 **(3 points)**
Déterminer la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{4-x}{x^2-1}$ en -1. | $f_2(x) = \dfrac{3x^3 - x^2}{x^3 - 3}$ en $-\infty$.

3 **(3 points)**
Soit $f(x) = \sin^3 x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est impaire et π-périodique. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau variations de f sur I en y précisant bien les valeurs de $f'(x)$ aux bornes de I.
3. Tracer la courbe représentative de f de manière sommaire sur le graphe ci-joint.



En réalité, ce n'est pas tout à fait cela mais il faudrait une étude plus subtile pour voir plus de détails.

4 **(11 points)**

Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a) Etudier la fonction f sur $]-2; +\infty[$.

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n > u_{n+1} > 1$.

   c) Montrer que la suite (u_n) converge.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

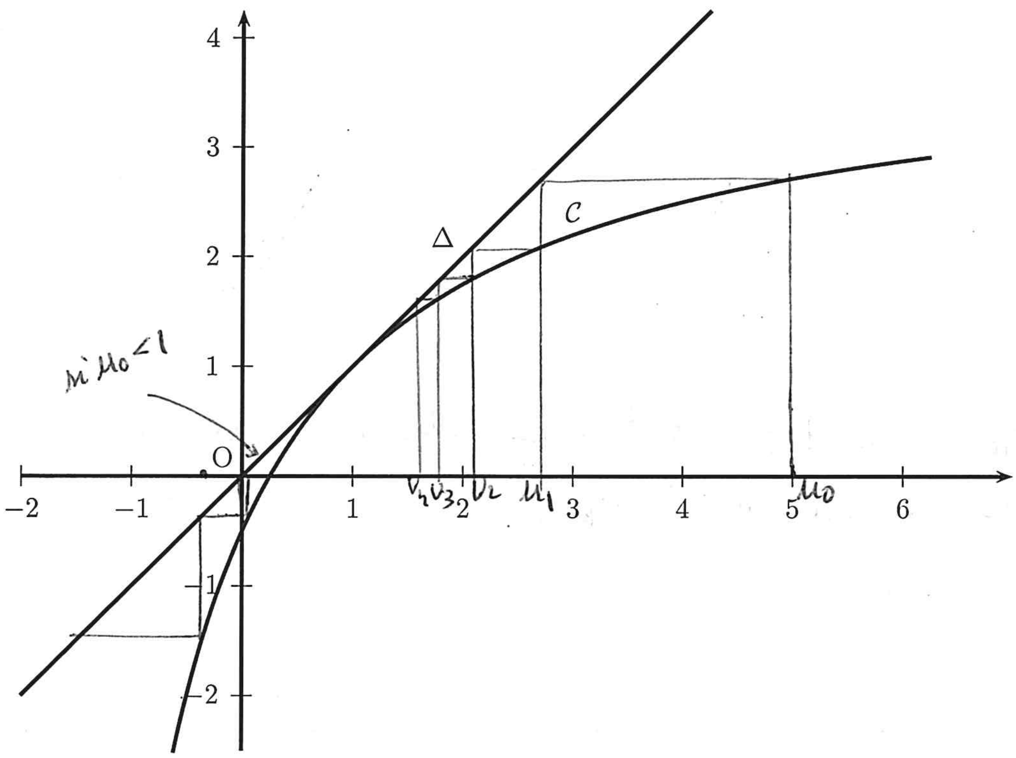
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. Pouvez-vous déterminer une valeur de u_0 pour que la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ soit une suite croissante. Justifier sommairement.



5 **Bonus (2 points)**

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a \neq 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{2^n \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$