DS4.

A ① Dans B3 la formule entrée est $2 \times B2 - A2 + 3$
Dans C3 la formule est $2 \times C2$

② On conjecture d'après le tableau que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

par contre on constate que $\frac{u_{12}}{v_{12}} \approx 3{,}008$; $\frac{u_{13}}{v_{13}} \approx 3{,}004$ ....

On conjecture alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 3}$

B ① Soit P_n la propriété $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$
Montrons que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Nous avons $u_0 = 1$ et pour $n = 0$ $3 \times 2^0 + n - 2 = 1$

Donc on a bien P_0 vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

Nous avons $u_{k+1} = 2u_k - k + 3$
$= 2(3 \times 2^k + k - 2) - k + 3$ (car P_k vraie)
$= 3 \times 2^{k+1} + k - 1$
$= 3 \times 2^{k+1} + (k+1) - 2$ donc P_{k+1} vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = 3 \cdot 2^n + n - 2$.

② $2 > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc par somme $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

③ On calcule les termes de (u_n) à la calculatrice et nous avons $u_{18} < 10^6$
et $u_{19} > 10^6$.

donc le rang cherché est 19

C Soit $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n}$

$= \frac{2u_n - n + 3}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}(2u_n - n + 3 - 2u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(3 - n)$

Donc $\forall n \geqslant 3 \quad w_{n+1} - w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $\boxed{\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right) \text{ décroissante à partir du rang } 3.}$

C2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $\quad \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{3\times 2^n + n - 2}{2^n}$

$$= 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{2^n} = 0$.

$\forall n \geqslant 4 \quad 0 \leqslant \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$ donc sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

on déduit par th des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

finalement, par somme on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 3}$

II 1) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2}\right)$ en $+\infty$.

$X = \frac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2} = \frac{-\pi}{3} \text{ (règle du plus haut degré)} \\ \lim\limits_{X\to\frac{-\pi}{3}} \sin X = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \overset{\text{par composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{+\infty} f = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $g(x) = \frac{2x + 2}{3x^2 + 7x + 4}$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)(3x+4)} = \frac{2}{3x+4}$$

Ainsi $\lim\limits_{-1} g = 2$

III P_n la ppté $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 4$.

I On peut vérifier aisément que P_4, P_5 sont vraies.

H Soit $k \geq 5$; supposons P_k vraie et P_{k-1} vraie et montrons P_{k+1} vraie.

$$\frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{k}{2.2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{k}{2^k} \leq \frac{1}{k} \quad (\text{car } P_k \text{ vraie})$$

donc $$\frac{k+1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

Il nous faut donc montrer que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{k+1}$ ⊛

c'est-à-dire $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k}$

ou encore $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{k-1}{2k(k+1)}$

finalement il suffit de montrer que $\frac{1}{2^k} \leq \frac{k-1}{k(k+1)}$

Mais $$\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1}$$

car P_{k-1} vraie.

Montrons maintenant $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} \leq \frac{k-1}{k(k+1)}$

Pour cela on étudie le signe de $D_k = \frac{k-1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{2(k-1)^2 - (k+1)k}{2k(k+1)(k-1)}$

Le dénominateur est positif donc D_k est du signe de $k^2 - 5k + 2$. $= \frac{k^2 - 5k + 2}{2k(k+1)(k-1)}$

$\Delta = 17$ et on a deux racines : $k_1 = \frac{+5+\sqrt{17}}{2} \simeq 4{,}5$ et $k_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$

d'où le tableau

k		k_2		k_1	
D_k	+	0	−	0	+

En particulier pour $k \geq 5$; $D_k > 0$ donc $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} \leq \frac{k-1}{k(k+1)}$

Donc on a bien montré ⊛ et donc on a bien P_{k+1} vraie.