DS N°6

21/11/17

I ① $g(x) = x^3 - 3x - 3$ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x-1)(x+1)$

On déduit le signe de $g'(x)$ et le TV de g :

x	$-\infty$		-1		$+1$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$ 0	$+\infty$

(les limites sont données par le th de plus haut degré).

1b Sur $]-\infty, +1]$ $g(x) \leq -1$ donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $[1; +\infty[$:
- g est dérivable donc continue
- g est strictement croissante
- $g(1) = -5$; $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et $0 \in [-5, +\infty[$

Donc d'après le CTVI, il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ unique tel que $g(\alpha) = 0$

Au final, sur $\mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

A la calculatrice, on a $2{,}103 < \alpha < 2{,}104$

1c On a alors le tableau de signes de g :

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

② a) $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$; $x > 1$

- f est une f° rationnelle donc par th de plus haut degré, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x$
$= +\infty$

x		-1		$+1$	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} 2x^3+3 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} x^2-1 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc par quotient, $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$.

2b f dérivable sur D et pour $x \in D$

$f'(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^2}\left((x^2-1) \times 6x^2 - 2x(2x^3+3)\right)$

$= \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\left(3x(x^2-1) - (2x^3+3)\right) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}(x^3-3x-3)$

$= \dfrac{2x\, g(x)}{(x^2-1)^2}$

Sur D ; $2x>0$; $(x^2-1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

ⓒ On déduit alors le TV de f :

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ⓓ On a
$$f(\alpha)-\frac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}=\frac{2\alpha^3+3-3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$$
$$=\frac{2\alpha^3-6\alpha-6}{\alpha^2-1}=\frac{2g(\alpha)}{\alpha^2-1}=0$$

ainsi on a bien $f(\alpha)=\frac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$

II ① La formule a entrer dans B3 est ((A2+1)/(2A2+4))xB2

2a) On conjecture que $v_n=\frac{1}{2^n}$.

2b) pour $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=(n+2)u_{n+1}$
$$=(n+2)\cdot\underbrace{\frac{n+1}{2n+4}u_n}_{v_n}$$
$$=\frac{n+2}{2(n+2)}v_n=\frac{1}{2}v_n.$$

On déduit alors que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et 1er terme $v_0=1$

Par th la forme explicite de v_n est $v_n=v_0q^n$ donc $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$

c'est-à-dire $v_n=\frac{1}{2^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

③ pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{v_n}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ (car $2>1$) donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}n+1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

III ① Voir graphique

② pour $x\in\mathbb{R}^*$, $1+x^2>1$ donc par inverse $\frac{1}{1+x^2}<1$ donc $f(x)<1$

D'autre part $\frac{1}{1+x^2}>0$ ainsi on a $0<f(x)<1$

On déduit donc que $E(f(x))=0$

Finalement pour $x\neq0$ $g(x)=0$.

③ On a $g(0) = E(1) = 1$

$\lim_{0^+} g = 0$; $\lim_{0^-} g = 0$ et $g(0) = 1$

donc g n'est pas continue en 0.

IV $f_1(x) = \dfrac{1}{(x^2+3x)^4}$; $x \in \mathbb{R}$ (de la forme u^n)

On a $f_1'(x) = -4 \cdot \dfrac{2x+3}{(x^2+3x)^5}$

$f_2(x) = \sin\left(\dfrac{1-x}{x^2+1}\right)$; $x \in \mathbb{R}$ (de la forme $\sin u$)

$$f_2'(x) = \frac{-(x^2+1)-2x(1-x)}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$$

$f_3(x) = \sqrt{\sqrt{3x^2+1}}$; $x \in \mathbb{R}$. (de la forme $\sqrt{u}$)

$$f_3'(x) = \frac{\left(\sqrt{3x^2+1}\right)'}{2\sqrt{\sqrt{3x^2+1}}}$$

$$= \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1} \times 2\sqrt{\sqrt{3x^2+1}}}$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{3x^2+1}\sqrt{\sqrt{3x^2+1}}}$$

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{5}{(x^2+9)}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a $f_4^{\$}(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+9}}$ (de la forme $\frac{1}{v}$)

donc $f_4'(x) = \dfrac{-\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}\right)'}{x^2+9}$

$$= \frac{-\sqrt{5}\times 2x}{2\sqrt{x^2+9}\,(x^2+9)} = \frac{-\sqrt{5}\,x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

V

$\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+3} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

$\lim\limits_{1^-} f = 1$

$\Bigg\}$ donc $\lim\limits_{1} f = 1$

De plus $f(1) = 1$ donc f continue en 1

Taux d'accroissement en $x=1$ pour la dérivabilité.

Soit $t(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

- Si $x > 1$; $t(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3} - 1}{x-1}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1}$$

Considérons $\varphi(x) = \sqrt{x^2+3}$; φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$

Par th $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \varphi'(1)$

donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

Alors on déduit que $\lim\limits_{1^+} t = \frac{1}{4}$.

- si $x < 1$; $t(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x-1}$

$$= \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = -\frac{1}{x}.$$

donc $\lim\limits_{1^-} t = -1$

Conclusion : En 1 ; f n'est pas dérivable mais $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes. L'une à gauche de coeff dir -1 et l'autre à droite de coeff dir $\frac{1}{4}$.

VI 1) On conjecture que les tangentes T_A et T_B sont perpendiculaires.

2) $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

donc $x_A = \frac{\pi}{2}$; $x_B = \frac{3\pi}{2}$.

La tangente au point d'abscisse a est $T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici $f'(x) = -\sin x$, alors $f(x_A) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$; $f'(x_A) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

donc $T_A : y = -1(x - \pi/2)$

d'où $T_A : y = -x + \pi/2$

Pour T_B : $f(x_B) = 0$; $f'(x_B) = -\sin(-\frac{3\pi}{2}) = +1$

donc $T_B : y = 1(x - 3\pi/2)$ donc $T_B : y = x - 3\pi/2$

3) T_A a pour vecteur dir $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\f'(x_A)\end{pmatrix}$ c'est à dire $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

T_B a pour vecteur dir $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 - 1 = 0$ donc $T_A \perp T_B$

VII

① $z_1 = \dfrac{2-4i}{1+3i}$

$= \dfrac{(2-4i)(1-3i)}{10}$

$= \dfrac{1}{10}(-10-10i) = -1-i$

$z_2 = i(2+i)(1+i)$

$= (-1+2i)(1+i)$

$= -3+i$

② $5i - z = 3iz + 1$

$\Leftrightarrow z(1+3i) = -1+5i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-1+5i}{1+3i}$

$= \dfrac{(-1+5i)(1-3i)}{10} = \dfrac{14+8i}{10} = \dfrac{1}{5}(7+4i)$

$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{5}(7+4i) \right\}}$

(E_2) : $\bar{z} + iz = 1$

On pose $z = x+iy$ alors $(E_2) \Leftrightarrow x - iy + i(x+iy) = 1$

$\Leftrightarrow x - y + i(x-y) = 1$

et par identification des parties réelles et imaginaires

$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ donc $S = \emptyset$