DS7

I $f_1(x) = \dfrac{3x-1}{(3x^2-2x+2)^3}$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(6x-2)(3x^2-2x+2)^{-3}}_{u'u^{-3}}$$

Donc $F_1(x) = \frac{1}{2}\dfrac{(3x^2-2x+2)^{-2}}{-2} + K \quad ; K \in \mathbb{R}.$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3x^2-2x+2)^2} + K$$

$f_2(x) = x\sqrt{1+x^2}$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{2x\,(1+x^2)^{1/2}}_{u'u^{1/2}}$$

donc $F_2(x) = \frac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + K \quad ; \quad K \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)} + K.$$

II $T(x) = F(\sin x) - x \quad ; \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$

1) T est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et.

Rappel: $[f(u(x))]' = u'(x)\, f'(u(x))$

$$T'(x) = (\sin x)' \times F'(\sin x) - 1$$

$$= \cos x \times \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 1$$

$$= \cos x \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} - 1 = \frac{\cos x}{|\cos x|} - 1 = 1 - 1 = 0$$

car sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; $|\cos x| = \cos x$

$T'(x) = 0$ sur un intervalle donc $T(x)$ est constante sur cet intervalle.

Donc $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\; ; \quad T(x) = T(0) = F(0) - 0 = 0$

T est la fonction nulle.

(2) On a alors $F(\sin x) - x = 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

En particulier $F(\sin x) = x$

pour $x = \frac{\pi}{6}$ on obtient $F\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

donc $\boxed{F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}}$.

(III) $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin(x+\alpha)}{\cos x - \cos(x+\alpha)}$; $x \in [0 ; \pi - \alpha]$.

Sur I ; $f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x - \cos(x+\alpha))^2} \times \Big[(\cos x - \cos(x+\alpha))(\cos x + \cos(x+\alpha)) - (\sin x + \sin(x+\alpha)) \times (-\sin x + \sin(x+\alpha))\Big]$

$$= \frac{1}{(\cos x - \cos(x+\alpha))^2} \times \left(\cos^2 x - \cos^2(x+\alpha) - (\sin^2(x+\alpha) - \sin^2 x)\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x - \cos(x+\alpha))^2} \left(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} - \underbrace{(\cos^2(x+\alpha) + \sin^2(x+\alpha))}_{=1}\right) = 0$$

Donc f constante sur I

donc $f(x) = f(0) = \dfrac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ pour tout $x \in I$.