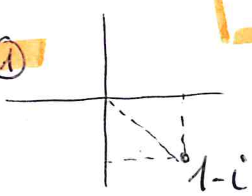
1)

DS8 - Complexes et exp.

I ①



On a $1-i = \boxed{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}}$

② $z = e^{i\theta}(1-i)$

$= e^{i\theta}\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

$= \boxed{\sqrt{2}\, e^{i(\theta-\pi/4)}}$ ceci est la forme exponentielle de z.

③ D'autre part, $z = e^{i\theta}(1-i)$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)(1-i)$

$= \cos\theta + \sin\theta + i(\sin\theta - \cos\theta)$

Ceci est la forme algébrique de z

③ D'après les deux écritures précédentes, en identifiant les parties réelles on a pour $\theta\in\mathbb{R}$,

$\cos\theta + \sin\theta = \mathrm{Re}(\sqrt{2}\, e^{i(\theta-\pi/4)})$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

Partie B :

① D'après le graphique, on conjecture • $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $\lim\limits_{+\infty} g = 0$

• $\mathcal{C}_f$ semble être en dessous de $\mathcal{C}_g$.

• La valeur de x pour laquelle l'écart entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ semble être maximal est $x = 1{,}5$.

② On a pour $x\geqslant 0$; $h(x) = g(x) - f(x)$

$= e^{-x} - e^{-x}\cos x$

$= e^{-x}(1-\cos x)$

et $\cos x \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$ donc $1-\cos x \geqslant 0$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}_+$; $h(x)\geqslant 0$

En conséquence, $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.

2)

③ • Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

donc $\quad -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (par composée)

donc par th des gendarmes, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

donc (Ox) asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

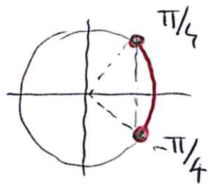
• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ donc (Ox) asymptote horizontale à $\mathcal{C}_g$.

④ ⓐ Pour $x \in \mathbb{R}_+$, h est dérivable et

$$h'(x) = g'(x) - f'(x)$$
$$= -e^{-x} - (-e^{-x}\cos x - \sin x \, e^{-x})$$
$$= +e^{-x}(-1 + \cos x + \sin x)$$
$$= e^{-x}(\sqrt{2}(\cos(x - \pi/4) - 1)$$ (d'après la partie A).

ⓑ • Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

alors $0 \leq x \leq \pi/2$ donc $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$



alors d'après le cercle trigonométrique $\cos(x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

et donc $\quad \cos(x - \pi/4) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où $\quad \sqrt{2}\cos(x - \pi/4) - 1 \geq 0$.

• Si $x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

alors $\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$ et par lecture sur le cercle trigo, on a

$\cos(x - \pi/4) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et alors $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1 \leq 0$.

3/ c) $h'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}(\cos(x-\pi/4)) - 1$, on déduit le tableau de variations de h sur $[0, 2\pi]$

x	0		$\pi/2$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(\pi/2)$	$\searrow$	0

avec $h(\pi/2) = e^{-\pi/2}$

5) Pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$H'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(-2+\cos x - \sin x) + \frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x - \cos x)$$

$$= +\frac{1}{2}e^{-x}(2-2\cos x)$$

$$= e^{-x}(1-\cos x) = h(x)$$

donc H est une primitive de h.

II) Soit $f(x) = \dfrac{3}{4+6e^{-2x}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{3(4+6e^{-2x})'}{(4+6e^{-2x})^2}$

$$= -\frac{3.(-12)e^{-2x}}{(4+6e^{-2x})^2} = 36\frac{e^{-2x}}{(4+6e^{-2x})^2}$$

et pour $X \in \mathbb{R}$ $e^X > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f s.↑ sur $\mathbb{R}$.

D'autre part par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$.

donc par quotient $\lim\limits_{+\infty} f = \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = 0$

D'où le T.V de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3/4$

Le corollaire du TVI nous montre alors que l'affirmation 1 est juste (f est dérivable donc continue, s.↑ et $0{,}5 \in [0, \frac{3}{4}]$)

4) Affirmation 2.

Une étude de l'algorithme montre qu'il balaye toute les valeurs de f de 0,01 en 0,01 et affiche la plus petite valeur de X telle que $f(X) > 0{,}5$ (au 100ème)

En résolvant $f(x)=0{,}5$ à la calculatrice ou en faisant un tableau de valeur de f avec un pas de 0,01, on déduit que l'affichage donné par l'algorithme est 0,55. En effet on a $f(0{,}54) < 0{,}5$ et $f(0{,}55) > 0{,}5$. La réponse est Faux

IV 1) a) $Z = \dfrac{z+3}{z-i}$ avec $z \neq i$

$$= \frac{x+iy+3}{x+iy-i} = \frac{x+3+iy}{x+i(y-1)}$$

$$= \frac{(x+3+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{(x+3)x+y(y-1)+i(yx-(x+3)(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+3x+y^2-y+i(3+x-3y)}{x^2+(y-1)^2}$$

et $x, y \in \mathbb{R}$ donc on déduit

$$\operatorname{Re} Z = \frac{x^2+3x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} Z = \frac{3+x-3y}{x^2+(y-1)^2}$$

b) $M(z) \in \mathcal{E} \iff Z$ imaginaire pur

$\iff \operatorname{Re} Z = 0$

$\iff x^2+3x+y^2-y=0$

$\iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

5/

Donc $M(z) \in \mathcal{E} \iff (x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{4}$

avec $(x,y) \neq (0,1)$

Ainsi $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$; de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ et privé du point $A(0,1)$.

② De même $M(z) \in \mathcal{F} \iff \operatorname{Im} Z = 0$

$\iff 3 + x - 3y = 0$ avec $(x,y) \neq (0,1)$

et donc $\mathcal{F}$ est la droite d'équation $3+x-3y=0$ privée du point $A(0,1)$.

③ $M(z) \in \mathcal{H} \iff |Z| = 1$

$\iff \left|\frac{z+3}{z-i}\right| = 1 \iff |z+3| = |z-i|$

ainsi en notant $B(-3)$ et $C(i)$ on a

$M(z) \in \mathcal{H} \iff MB = MC$

donc $\mathcal{H}$ médiatrice de $[BC]$. $\mathcal{H}$ est une droite !

V $z = -(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

① $z^2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 - 2i(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$= 6+2+2\sqrt{6}\sqrt{2} - 6 - 2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} - 2i(6-2)$

$= 4\sqrt{6}\sqrt{2} - 8i$

$= 8\sqrt{3} - 8i$ ← forme algébrique de z^2

$= 8(\sqrt{3} - i) = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$= 16e^{-i\pi/6}$ ← forme exp de z^2

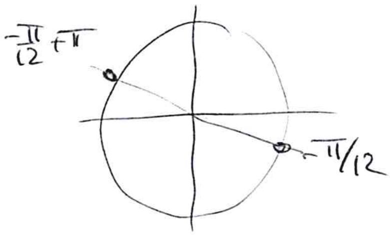
6)

(3) On a donc $|z^2| = 16$ donc $|z| = 4$

et $\arg z^2 = -\frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

donc $2\arg(z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{12} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$



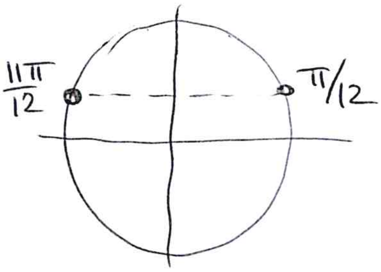
Mais $\operatorname{Re} z < 0$ d'après la forme algébrique de z

donc $\arg z$ ne peut valoir $-\frac{\pi}{12} \quad (2\pi)$ (voir figure)

donc $\arg z = \frac{11\pi}{12} \quad (2\pi)$

ainsi on déduit $z = 4e^{i\frac{11\pi}{12}}$

(4) donc $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ et $\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



et donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(II) **(3 points)** *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4 + 6\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Affirmation 1 : L'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 2 : L' algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0 Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0{,}5$ X prend la valeur $X + 0{,}01$ Y prend la valeur $\frac{3}{4 + 6\mathrm{e}^{-2X}}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

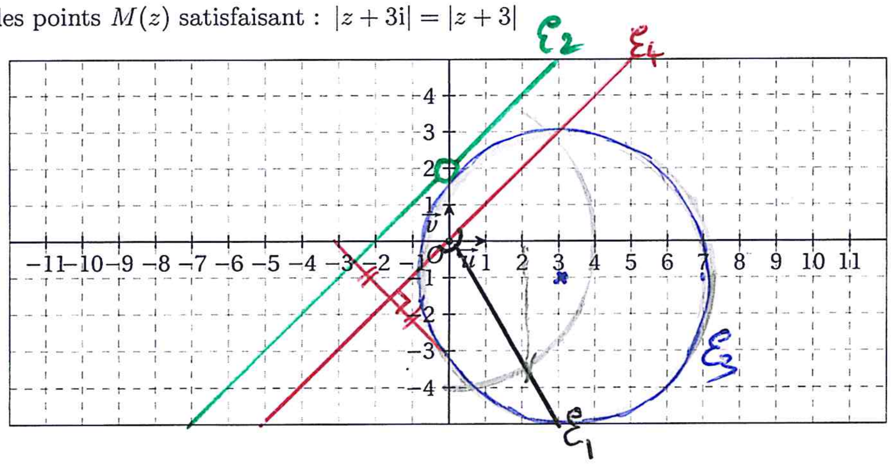
(III) **(2 points)** Dans le plan complexe $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ci-dessous, représentez les ensembles suivants : *(on ne demande pas de justification mais il faut laisser les traits de construction apparents).*

$\mathscr{E}_1$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $\arg(z) = \frac{-\pi}{3} \quad (2\pi)$

$\mathscr{E}_2$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $\arg(z - 2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} \quad (\pi)$

$\mathscr{E}_3$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $|z - 3 + \mathrm{i}| = 4$

$\mathscr{E}_4$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $|z + 3\mathrm{i}| = |z + 3|$



(IV) **(5 points)** On définit pour tout nombre complexe $z \neq \mathrm{i}$ le nombre $Z = \frac{z+3}{z-\mathrm{i}}$.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire pur, $\mathscr{F}$ celui des points $M(z)$ tels que Z est réel et enfin $\mathscr{H}$ celui des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.

1. a) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;1)\}$. Déterminer la forme algébrique de Z. Vous montrerez en particulier que
$$\Re(Z) = \frac{x^2 + 3x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2};$$
   b) En déduire la nature et les éléments caracteristiques de l'ensemble $\mathscr{E}$.
2. De même, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathscr{F}$.
3. Par des considérations d'ordre géométrique, déterminer $\mathscr{H}$.

(V) **(2 points)** On donne $z = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \mathrm{i}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2.
2. En déduire la forme exponentielle de z^2.
3. **En bonus :** En déduire alors le module et un argument de z.
4. **En bonus :** En déduire alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$