DS 9

I 1) $A(\sqrt{2},3)$, $B(1,1)$, $C(0;4)$

donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-7\end{pmatrix}$ et $xy'-x'y = -7(1-\sqrt{2})-2\sqrt{2}$

$= -7+5\sqrt{2} \neq 0.$

$\vec{AB}$, $\vec{AC}$ non colinéaires $\Rightarrow$ A, B, C non alignés. Rép vraie.

2) $i(1+i) = e^{i\pi/2}\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$= \sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}$ donc pour $n=4$, $(i(1+i))^n = (\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4})^8$

$= 16\,e^{6i\pi} = 16 > 0.$

La réponse est fausse

3) $A(4)$; $B(-2i)$ et $M(z)$ tq $|z-4| = |z+2i|$.

Ceci équivaut à $AM=BM$ et donc l'ensemble est la médiatrice du segment [AB].

De plus pour $z=3i$ l'égalité est vraie, (car elle donne $5=5$)

donc $C(3i)$ est un point de cette droite. Rép vraie.

4) $(z-1)(z^2-8z+25)=0 \iff z=1$ ou $z^2-8z+25=0$

$\Delta=-36$ donc $z=\frac{8+6i}{2}=4+3i$

ou $z=4-3i$

ainsi (E) admet 3 racines.

Soient $A(1)$; $B(4+3i)$; $C(4-3i)$

alors $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 9-9 = 0$ donc ABC est rectangle en A (et isocèle)

Rép vraie

(II) $z' = z^2 + 4z + 3$.

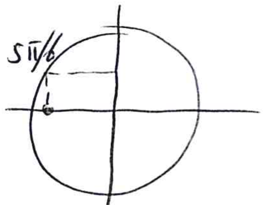
(1) $M(z)$ invariant ssi $z = z^2 + 4z + 3$

$\iff z^2 + 3z + 3 = 0$

$\Delta = -3 < 0$ donc $z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ sont invariants

On a $|z_1|^2 = \dfrac{9+3}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ donc $|z_1| = \sqrt{3}$.

Alors $z_1 = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3}\, e^{5i\pi/6}}$



On a alors $z_2 = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3}\, e^{-5i\pi/6}}$

$\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

(2) $A\left(\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $A\left(\sqrt{3}\, e^{-5i\pi/6}\right)$

$B\left(\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $B\left(\sqrt{3}\, e^{5i\pi/6}\right)$

$$\left.\begin{aligned} OA &= |z_A - z_O| = |\sqrt{3}\, e^{-5i\pi/6}| = \sqrt{3} \\ OB &= |z_B - z_O| = |\sqrt{3}\, e^{5i\pi/6}| = \sqrt{3} \\ AB &= |z_B - z_A| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{OAB équilatéral.}$$

avec les forme algébriques

(3) On note $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

alors $z' = (x+iy)^2 + 4(x+iy) + 3$

$= x^2 + y^2 + 4x + 3 + i(2xy + 4y)$

on a donc $M \in \mathcal{E} \iff M' \in O\vec{u}$

$\iff \operatorname{Im}(z') = 0$

$\iff 2xy + 4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0$

$\iff y = 0$ ou $x = -2$

Ainsi $\mathcal{E}$ est l'union des deux droites d'équation $y = 0$ et $x = -2$.

III

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n \end{cases} ; n \in \mathbb{N}.$$

1 a)

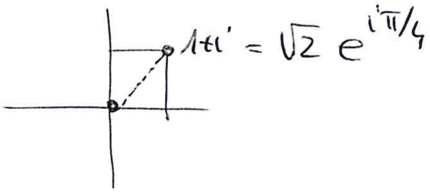
$z_1 = 16 \cdot \frac{1+i}{2} = 8(1+i)$

$z_2 = 8(1+i) \cdot \frac{1+i}{2} = 4(1+i)^2 = 4\left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^2 = 8i$

$z_3 = 8 i \cdot \frac{1+i}{2} = 4\left(i(1+i)\right) = 4(-1+i)$

b) OK

c) $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4}$



d) $OA_1 = |z_{A_1} - z_O| = |z_1| = |8(1+i)| = 8\sqrt{2}$ car $|1+i| = \sqrt{2}$

$A_0A_1 = |z_{A_1} - z_{A_0}| = |z_1 - z_0| = |8+8i-16| = |-8+8i| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

~~donc~~ $OA_0 = |16| = 16$.

On constate que $OA_1^2 + A_0A_1^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 256$

et $OA_0^2 = 16^2 = 256$

Donc par th de Pythagore on déduit OA_0A_1 rectangle (et isocèle) en A_1

2) pour $n \in \mathbb{N}$.

$r_{n+1} = |z_{n+1}|$

$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4} z_n\right|$ car $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$ ainsi (r_n) géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et premier terme $r_0 = 16$.

$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ ainsi par th (r_n) converge vers 0.

On déduit alors $OA_n = r_n$ tend vers 0. les points A_n se rapprochent du centre.

3. a pour $n \in \mathbb{N}$

$$A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2} z_n - z_n\right| = |z_n| \left|\frac{1+i}{2} - 1\right|$$

$$= |z_n| \left|-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}$$

donc $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$

3b

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1} \quad \text{d'après 3a.}$$

$$= r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_n$$

et la forme explicite de r_n est : $r_n = r_0 q^n = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

donc $L_n = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cdots\cdots + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

$$= 16 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 16 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-\left(\sqrt{2}/2\right)^n}{1-\sqrt{2}/2} \quad \text{en vertu de la formule } 1+q+\cdots+q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$= \boxed{\frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}$$

3c $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$

on a donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} L_n = \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$

L'escargot a une longueur finie !!

IV Cherchons les racines de P sous la forme $z = re^{i\theta}$

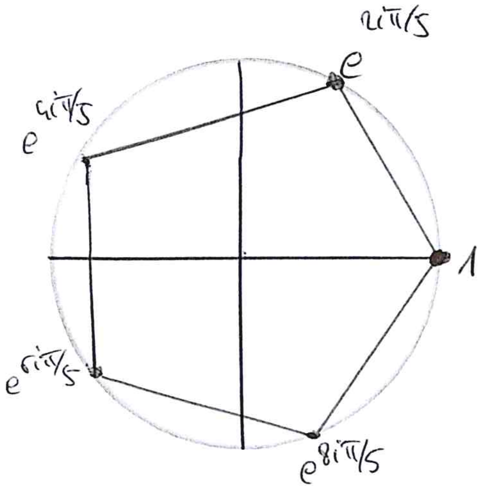
Alors $(re^{i\theta})^5 = 1$ donc $|re^{i\theta}|^5 = 1 \implies r = 1$

et $\arg((re^{i\theta})^5) = 0 \ (2\pi) \implies 5\theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

On a donc $\theta = \frac{2k\pi}{5}$, ce qui nous donne 5 angles différents.

$\theta = 0$; $\theta = \frac{2\pi}{5}$; $\theta = \frac{4\pi}{5}$; $\theta = \frac{6\pi}{5}$; $\theta = \frac{8\pi}{5}$.

Ainsi les 5 racines sont $\boxed{1 ; e^{2i\pi/5} ; e^{4i\pi/5} ; e^{6i\pi/5} ; e^{8i\pi/5}}$



et ça forme un polygone régulier.