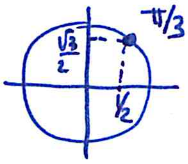
DS 10.

I $z_0 = 2+3i$; $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n$; $n \in \mathbb{N}$.

on a $\left|\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{2+6} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/3}$



(En fait c'est inutile).

donc $\forall$ pour $n \in \mathbb{N}$ $|z_{n+1}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n\right|$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

ainsi $(|z_n|)$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et premier terme $|z_0| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Donc on a pour $n \in \mathbb{N}$; $|z_n| = \sqrt{13} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

On a alors $|z_n| \leqslant 10^{-20}$ $\iff \sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant 10^{-20}$

$\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}$

$\iff n \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)$ (car $\ln$ s $\uparrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n \geqslant \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)}{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}}_{\approx 136{,}6}$ (car $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$)

Ainsi à partir de $n = 137$, on a $|z_n| \leqslant 10^{-20}$.

II A 1 $f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$ avec $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n dérivable sur $[0,1]$ et

$f_n'(x) = 1 + n e^{n(x-1)}$; $x \in [0,1]$

et $e^{n(x-1)} > 0$ donc $f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante.

De plus sur $[0,1]$; $x > 0$; $e^{n(x-1)} > 0$ donc par somme f_n est positive.

2 D'après le graphique, il semble que le point $A(1;2)$ soit un point commun des courbe.

En effet nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(1) = 1 + e^{n \times 0} = 1+1 = 2$

donc $A(1,2) \in C_n$.

3 Si on note a_n le coeff directeur de la tangente à C_n au point A, on conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

Démonstration : Soit T_n la tangente au point d'abscisse A, son coefficient directeur est $a_n = f_n'(1)$
$= 1 + n e^0 = 1+n$.

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

B 1 $u_n = f_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$

donc $u_n = 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc u_n est stationnaire.

2 $u_n = f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $u_n = x + e^{n(x-1)}$ avec $0 \leq x < 1$

$X = n(x-1)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n(x-1) = -\infty$ (car $x < 1$)

$\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

$\Big\}$ Composée $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n(x-1)} = 0$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$ (ça se voit sur le graphique)

III ① Soit $f(x) = e^x$; on a alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(x) = f(x) = e^x$

donc $T : y = e(x-1) + e$ donc $T : y = ex$

Donc la tangente au point d'abscisse e est bien la droite $\mathcal{D}_e$.

② Par lecture graphique, $\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } m > e & \text{nous aurons 2 points d'intersect}^{\circ}. \\ \text{si } m = e & \text{un seul.} \\ \text{si } m < e & \text{aucun.} \end{array}}$

③ L'abscisse des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_m$ doit être racine de l'équation suivante : $f(x) = mx$.

c'est-à-dire $e^x - mx = 0$

Soit $\varphi(x) = e^x - mx$, $x \in \mathbb{R}$.

On étudie φ pour déterminer ses racines.

φ dérivable et $\varphi'(x) = e^x - m$.

$\varphi'(x) > 0 \iff e^x > m \iff x > \ln m$ (car ln ↗).

D'où le TV de φ :

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	$m-(\ln m)m$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$ *

$\lim\limits_{-\infty} \varphi = +\infty$

Ainsi, selon le signe de $m - m\ln m$, nous aurons le nombre de solutions.

$m - m\ln(m) = m(1 - \ln m)$ et $m > 0$ donc $\alpha_m = m(1 - \ln m)$ est du signe de $1 - \ln m$.

Et $1 - \ln m > 0 \iff \ln m < 1 \iff m < e$ (car exp ↗)

Finalement nous avons

m		e	
α_m	$+$	0	$-$

• Donc pour $m < e$, $\alpha_m > 0$, alors le minimum de φ est strictement positif et φ n'a pas de racine donc pas de point d'intersect°.

• pour $m = e$; $\alpha_m = 0$ donc φ s'annulle une fois en e et donc on a un unique point d'intersection.

• pour $m > e$; $\alpha_m < 0$ et par application du corollaire du TVI sur $]-\infty ; \ln m]$ puis sur $[\ln m ; +\infty[$, on déduit que φ admet exactement 2 racines.

On a donc deux points d'intersection.

IV ① Sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$, $g(x) = 2x \iff 2x \ln(2x+1) = 2x$

$$\iff 2x(\ln(2x+1) - 1) = 0$$

Il est donc clair que $x = 0$ est aussi solution.

Affirmation 1 est donc fausse.

② Nous avons $g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \cdot \frac{2}{2x+1}$

donc $g(\frac{1}{2}) = \ln 2$ et $g'(\frac{1}{2}) = 2\ln 2 + 1$

donc le coeff directeur de la tangente au point $x = \frac{1}{2}$ est $g'(\frac{1}{2}) = 1 + 2\ln 2$
$= 1 + \ln 4$.

l'affirmation 2 est vraie.

③ $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$. (E)

Si on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ alors (E) $\iff x + iy - x + iy + 2 - 4i = 0$

$$\iff 2iy + 2 - 4i = 0$$

$$\iff 2 + i(2y - 4) = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ceci étant impossible, l'équation n'a pas de solution.

l'affirmation 3 est fausse

④ $\ln\sqrt{e^7} + \dfrac{\ln e^9}{\ln e^2} = \dfrac{1}{2}\ln e^7 + \dfrac{9}{2}$

$= \dfrac{7}{2} + \dfrac{9}{2} = 8$

$\dfrac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}} = \dfrac{e^{\ln 2}\times e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}\times\dfrac{1}{e^{\ln 4}}} = \dfrac{2\times 3}{3/4} = 8$

l'affirmation 4 est vraie.

⑤ $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4 \quad (E)$

Domaine de résolution $D =]1;+\infty[$

et sur D : $(E) \iff \ln(x-1) = \ln 4 + \ln(x+2)$

$\iff \ln(x-1) = \ln 4(x+2) \iff x-1 = 4(x+2)$ car $\ln \nearrow$

$\iff 3x = -9 \iff x = -3 \notin D$

Il n'y a pas de solution. L'affirmation est fausse.

⑥ $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_{n+1}) = \ln u_n - 1$

donc $e^{\ln(u_{n+1})} = e^{\ln u_n - 1}$

$\Rightarrow u_{n+1} = u_n \times e^{-1}$

donc (u_n) géométrique de raison $q = e^{-1} = 1/e$.

Ⓥ Comparer e^π et π^e revient à se poser la question $e^\pi < \pi^e$?

et $e^\pi < \pi^e \iff \pi\ln e < e\ln\pi$

$\iff \dfrac{\ln e}{e} < \dfrac{\ln\pi}{\pi}$

On étudie alors la f° $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. $x>0$

φ dérivable et $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$ d'où

x		e	
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

$\pi > e$ donc $\varphi(\pi) < \varphi(e)$

donc $\dfrac{\ln\pi}{\pi} < \dfrac{\ln e}{e}$ donc $\boxed{\pi^e < e^\pi}$