DS15

I ① $\mathcal{P} : 2x+y-z+5=0$; $\mathcal{D}_2$ passe par $P(1,-3,2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ vect dir.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ vect normal de $\mathcal{P}$

$\vec{n}.\vec{u} = 3 \neq 0$ donc ⓐ et ⓑ impossible.

Soit $M(1+t\,;-3-t\,;2-2t) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}_2$

Alors $2(1+t) -3-t -2+2t +5=0$

$\Leftrightarrow 3t=-2$

$\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$ alors le point d'intersect° est $M(\frac{1}{3}\,;-\frac{7}{3}\,;\frac{10}{3})$

La réponse est ⓒ.

② $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{AB}=0$.
$\vec{n}.\vec{AC}=0$

donc le vecteur normal de $\mathcal{P}$ est normal à deux droites sécantes de (ABC) donc $\mathcal{P}//(ABC)$.

Il reste à voir s'ils sont confondus.

$C(0,3,1)$ ne satisfait pas l'éq de $\mathcal{P}$ donc $C\notin\mathcal{P}$ et ainsi

(ABC) et $\mathcal{P}$ strictement parallèle.

La réponse est ⓓ

③ D'une part $\vec{AB}.\vec{AC} = 12$

D'autre part $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC \cos(\widehat{BAC})$

$= \sqrt{8}\sqrt{21} \cos(\widehat{BAC})$

ainsi $\cos \widehat{BAC} = \frac{12}{\sqrt{8}\sqrt{21}}$ donc $\widehat{BAC} \simeq 22{,}2°$. La réponse est ⓐ

4) On se place dans le repère $(C, \vec{CD}, \vec{CB}, \vec{CG})$

alors $I(\frac{1}{2}, 0, 1)$; $J(0, \frac{1}{2} ; 1)$; $M(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$; $N(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Alors $\vec{IJ}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{MN}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

et donc $\vec{IJ} . \vec{MN} = 0$ et ainsi (IJ) et (MN) orthogonales.

(Elles ne sont pas sécantes car non coplanaires l'une est dans $z=1$ et l'autre dans $z = \frac{1}{2}$.)

La réponse est c.

II Partie A

1) Voir figure.

Explication : les plans $z=0$, $z=1$ sont parallèles
ainsi l'intersection du plan (OBD) avec ces deux plans sont des droites parallèles.

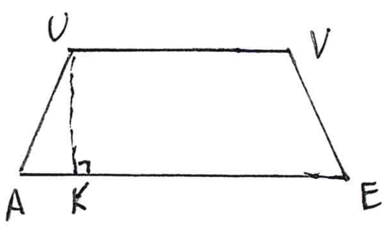
ainsi $(DU) // (OB)$ (car de plus $(SB) \subset (OBD)$).

2)

$$\left.\begin{array}{l} (AE) \subset (AEU) \\ (BC) \subset (BCU) \\ (AEU) \text{ et } (BCU) \text{ sécants} \\ (AE) // (BC) \end{array}\right\}$$

Donc par th du toit $(UV) // (BC)$

3)



Il faut montrer que A, K, E alignés et $\vec{AK} \perp \vec{UK}$.

$A(1, 0, 0)$; $E(0, -1, 0)$ et $K(\frac{5}{6} ; -\frac{1}{6} ; 0)$

ainsi $\vec{AE}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AK}\begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\vec{AK} = \frac{1}{6} \vec{AE} \Rightarrow K \in (AE)$

$B(0,1,0)$; $S(0,0,3)$

On cherche les coordonnées de U.
U est le point de (SB) tel que $z=1$.

(SB) a pour vecteur directeur $\vec{SB}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ et passe par $B(0,1,0)$

donc $(SB) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t+1 \\ z = -3t \end{cases}$

ainsi en fixant $z=1$ on a $t = -\frac{1}{3}$

et donc $U(0 ; \frac{2}{3} ; 1)$

Alors $\vec{UK}\begin{pmatrix}5/6\\-5/6\\-1\end{pmatrix}$ et donc $\vec{AK}.\vec{UK} = 0$

Finalement K est bien le pied de la hauteur issue de U.

Partie B

(1) Soit $\mathcal{P} : 3x-3y+5z-3=0$

$E(0,-1,0)$ satisfait les éq de $\mathcal{P}$ car $+3-3=0$
$A(1,0,0)$ — — — $3-3=0$
$U(0,\frac{2}{3},1)$ — — — — $-3\times\frac{2}{3}+5-3=0$.

ainsi $\mathcal{P} = (EAU)$ et $(EAU) : 3x-3y+5z-3=0$.

(2) d orthogonale à (EAU) passant par S a pour vecteur dir $\vec{m}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$

ainsi

$d : \begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 5t+3 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

Soit $H \in d \cap (EAU)$

$H \in d \Rightarrow H(3t, -3t, 5t+3)$

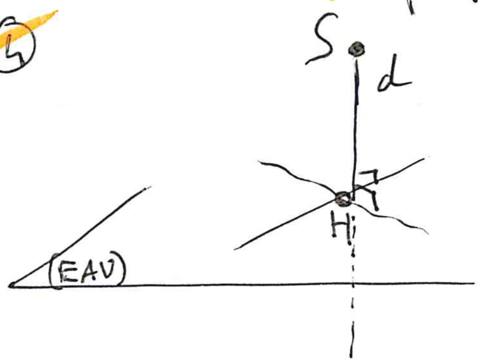
et $H \in (EAU) \Rightarrow 3.3t - 3(-3t) + 5(5t+3) - 3 = 0$

$\Rightarrow 43t + 12 = 0$

$\Rightarrow t = -\frac{12}{43}$.

on a alors $\boxed{H\left(-\frac{36}{43}\,;\,\frac{36}{43}\,;\,\frac{69}{43}\right)}$.

4



D'après ce qui précède, H est le pied de la hauteur de la pyramide SEAUV issue de S.

Le volume de SEAUV est alors $V = \text{Base} \times \text{hauteur} \cdot \frac{1}{3}$

$= \mathcal{A}(EAUV) \times HS \times \frac{1}{3}$.

$\mathcal{A}(EAUV) = \frac{5\sqrt{43}}{18}$

$\vec{HS}\begin{pmatrix} 36/43 \\ -36/43 \\ 60/43 \end{pmatrix} \Rightarrow HS^2 = \left(\frac{36}{43}\right)^2 + \left(\frac{36}{43}\right)^2 + \left(\frac{60}{43}\right)^2 = \frac{144}{43}$.

$\Rightarrow HS = \frac{12}{\sqrt{43}}$

donc $V = \frac{5\sqrt{43}}{18} \times \frac{12}{43} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{10}{9}}$

Le volume total de la pyramide est $V_T = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \times 3 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{2}$

ça ne partage donc pas en 2.

III ① Comme les fonctions f_n sont positives, (I_n) est l'aire sous la courbe.

On conjecture (I_n) croissante et converge vers 1.

② $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$

③ ⓐ pour $x \in [0,1]$ on a $x^n \geq 0$

$$\Rightarrow x^n + 1 \geq 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \quad (\text{car } x \longrightarrow \frac{1}{x} \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

ⓑ Par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre.

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$ donc $I_n \leq 1$. (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

ⓑ Pour tout $X \in \mathbb{R}_+$; $X^2 \geq 0$

donc $-X^2 \leq 0$ et donc $1 - X^2 \leq 1$

d'où $(1-X)(1+X) \leq 1$

et donc $1 - X \leq \frac{1}{1+X}$ ($\div 1+X$ avec $1+X>0$)

On applique ce résultat pour $X = x^n \geq 0$

on a $\boxed{1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}}$

5) $$\int_0^1 (1-x^n)\,dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{1-\frac{1}{n+1}}$$

6) On a pour tout $x\in[0,1]$, $1-x^n \leq \dfrac{1}{1+x^n}$.

ainsi par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre

$$\int_0^1 1-x^n\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \quad \text{et donc} \quad 1-\frac{1}{n+1} \leq I_n.$$

On a donc avec la question 3

$$1-\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

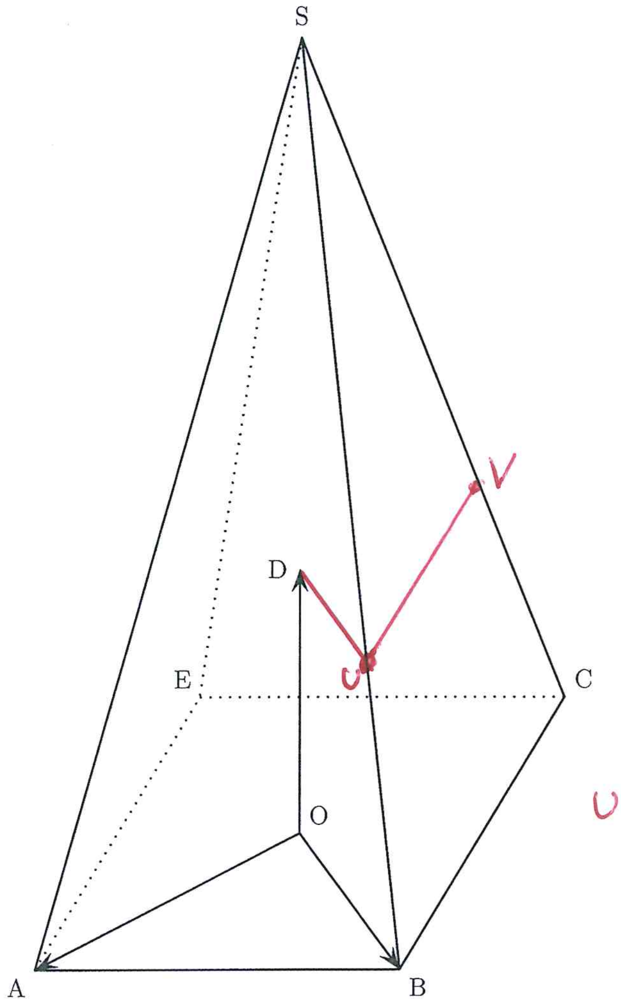
et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n+1} = 1$ donc par th des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 1}$$

7a) voir feuille

7b) Cet Algorithme permet de calculer une valeur approchée de I_n par la méthode des rectangles. Ici avec 5 rectangles.

II **(8 points)**
Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.



U satisfait (OB)//(DU).

Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$ Demander un entier $p \geqslant 1$ Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0	0	$1/5$
1	$1/5$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{1+(1/5)^2} \times \frac{1}{5} \approx 0{,}392$
2	$2/5$	0,565
3	$3/5$	0,712
4	$4/5$	0,834

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

IV Montrer que pour tout entier n supérieur à 8 :

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}$$