Devoir N°3

I

① D'après le graphique, on conjecture que (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante et qu'elle converge vers $l=2$.

② $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2}$

$$= \frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1} - 2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1} + 2} = \frac{\frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+8+2(2u_n+1)}{2u_n+1}}$$

$$= \frac{-3u_n+6}{5u_n+10}$$

$$= -\frac{3}{5}\,\frac{u_n-2}{u_n+2} = -\frac{3}{5}v_n$$

On en déduit que (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+2} = \dfrac{-1}{3}$

③ Par H, on a alors $v_n = v_0\, q^n$

c.à.d, $\forall n \geqslant 0$; $v_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

④ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

donc $(u_n+2)v_n = u_n - 2$

donc $u_n v_n + 2v_n - u_n = -2$

donc $u_n(v_n - 1) = -2-2v_n$ d'où $u_n = \dfrac{-2v_n-2}{v_n-1}$

c.à.d $u_n = \dfrac{2v_n+2}{1-v_n}$

On a donc $u_n = \dfrac{-\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n + 2}{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n}$. $\forall n \in \mathbb{N}$

5) $\left|-\frac{3}{5}\right| < 1$ donc par th, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$.

Alors par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

6) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^0 + -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^1 + \cdots + -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^0 + \left(-\frac{3}{5}\right)^1 + \cdots + \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = -\frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{8/5} = -\frac{5}{24}\left(1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right).$$

II 1) $u_1 = f(u_0)$

$$= f(3) = \frac{2+9}{4+3} = \frac{11}{7}.$$

2) f est dérivable sur son domaine de définition car c'est une fonction rationnelle et $\forall x \in [0,4]$

$$f'(x) = \frac{(4+x)3 - (2+3x)}{(4+x)^2}$$

$$= \frac{10}{(4+x)^2}$$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0;4]$

donc f est croissante sur $[0;4]$

③ Montrons par récurrence que $\forall n$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

Ⓘ $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{7}$ donc on a bien $1 \leq \frac{11}{7} \leq 3 \leq 3$

c.à.d $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$.

Ⓗ Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons $1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 3$

et montrons $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 3$.

On a $1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 3$

donc $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(3)$ car $f \nearrow$ sur $[0,4]$

donc $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{11}{7}$ et $\frac{11}{7} \leq 3$

donc on a bien $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 3$

et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

④ ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ donc (u_n) minorée par 1

Donc par th : (u_n) est convergente vers $\ell \geq 1$

ⓑ On a $\ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$

ⓒ Donc $(4+\ell)\ell = 2+3\ell$

ainsi $\ell^2 + \ell - 2 = 0$

$\iff (\ell-1)(\ell+2) = 0$ donc $\ell = 1$ ou $\ell = -2$

mais $\ell \geq 1$ donc $\ell = 1$

(III) $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ avec $u_0 = 0$.

Plusieurs méthodes sont possibles.

Méthode 1 : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

(I) Pour $n=0$ $u_0 = 0$ donc ça marche.

(H) Pour $k \in \mathbb{N}$; supposons $u_k = \dfrac{k}{k+1}$ et montrons $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$

On a par définition de la suite

$$u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k}$$

$$= \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} \quad \text{car } u_k = \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$ et donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+1/n}$

et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$ (par quotient)

Méthode 2 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$; $x>2$

On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

f dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$ donc $f'(x) > 0$ sur $]2,+\infty[$

donc $f \uparrow$ sur $]2,+\infty[$.

. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

ok ; c'est simple

[...].

Conclusion : $(U_n) \uparrow$ et (u_n) majorée par 1 donc (U_n) converge.

Méthode 3 : On montre que $\forall n$, $u_n \leq 1$ (par Rec)

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \ldots\ldots$

$$= \frac{(1-u_n)^2}{2-u_n}$$

et $2-u_n \geq 1 > 0$ donc par quotient $u_{n+1} - u_n \geq 0$

donc $u_{n+1} \geq u_n$

donc $(u_n) \uparrow$.

$(U_n) \uparrow$ et majorée donc (U_n) converge.