DS2

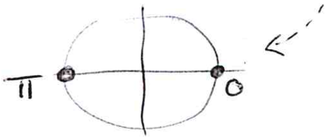
3 oct 2019

I ① $f_1(x) = x\sin(2x)$

donc $f_1'(x) = \sin 2x + x(\sin(2x))'$
$= \sin 2x + 2x\cos 2x$.

② $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ donc $f_2'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$

II $\sin 4x = 0$; Nous savons que $\sin X = 0 \iff X = k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$



Ainsi

$\sin(4x) = 0$ ssi $4x = k\pi \,;\, k\in\mathbb{Z}$

$\iff x = \dfrac{k\pi}{4} \,;\, k \in \mathbb{Z}$ Donc sur $[0;2\pi]$: $S = \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; 2\pi\right.$

III ① $u_n = 2^{2n} - 3^n$

$= 4^n - 3^n = 4^n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

et $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

$4 > 1$ donc par th $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$

Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1$ et par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

② Nous avons $v_n = \dfrac{3n^4 - 5n^2}{2n^3+1}$

$= \dfrac{n^4(3 - 5/n^2)}{n^3(2 + 1/n^3)} = n \times \dfrac{3 - 5/n^2}{2 + 1/n^3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(3 - 5/n^2) = 3$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(2 + 1/n^3) = 2$

Donc par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(3) $w_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique :

donc $w_n = \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$= 3 \cdot \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc par somme $\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1$

ainsi, par produit, $\lim_{n\to+\infty} w_n = 3$

(4) $z_n = 1 + 2 + \cdots + n$ $(n \geqslant 1)$

c'est la somme des termes d'une suite arithmétique donc

$z_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

et $\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc par produit $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$

IV (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = (\sin(-x))^2$

$= (-\sin x)^2 = (\sin x)^2 = f(x)$

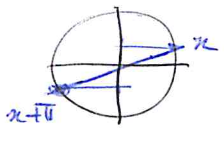
donc f est une f° paire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = (\sin(x+\pi))^2$

$= (-\sin x)^2$

$= (\sin x)^2$

$= f(x)$



donc f est de période π.

(2) f dérivable sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \left((\sin x)^2\right)'$

$= 2 \sin x \cos x$

et sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'après le cercle trigonométrique $\sin x \geqslant 0$ et $\cos x \geqslant 0$

Donc par produit $f'(x) \geqslant 0$ sur I d'où le tableau de variations de f :

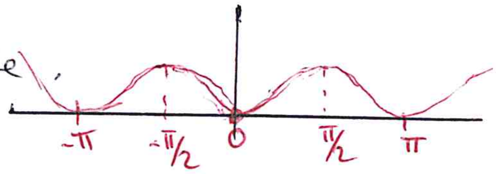
x	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0		0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

$f(0) = (\sin 0)^2 = 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\sin \frac{\pi}{2})^2 = 1$

$f'(0) = 0$; $f'(\pi/2) = 0$

Par parité, on déduit la construction de φ sur une période et puis on reproduit pour chaque période.



V $u_0 = 3$ et $u_n = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$; $v_n = \dfrac{3}{u_n}$

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1}}$$

$$= \frac{3}{\frac{3u_n}{3+2u_n}} = 3 \times \frac{3+2u_n}{3u_n} = \frac{3+2u_n}{u_n}$$

$$= \frac{3}{u_n} + 2 = v_n + 2$$

Ainsi (v_n) arithmétique de raison $+2$ et premier terme $v_0 = \frac{3}{u_0} = 1$

(2) Ainsi par th $v_n = v_0 + n2$ c.à.d $v_n = 1 + 2n$

Nous avons $v_n = \dfrac{3}{u_n}$ pour tout n ; donc $u_n = \dfrac{3}{v_n}$

donc on déduit, $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \dfrac{3}{1+2n}$

(3) Par th, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+2n) = +\infty$ et donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

VI

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

Soit P_n cette ppté

(1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.

(I) Pour $n=0$; $u_0 = 1$; $n^2 = 0$ et on a bien $u_0 \geq 0^2$

(H) Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vraie ; c.à.d $u_k \geq k^2$

et montrons P_{k+1} vraie ; c.à.d $u_{k+1} \geq (k+1)^2$.

P_k vraie donc $u_k \geq k^2$

et par somme on a donc $u_k + 2k + 1 \geq k^2 + 2k + 1$

donc $u_{k+1} \geq (k+1)^2$

Donc P_{k+1} vraie.

Conclusion : $\forall n$; $u_n \geq n^2$.

(2) (u_n) est minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq n^2 \geq 0$.

(u_n) ne semble pas majorée ; on pourrait même démontrer par comparaison que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

VII

$$u_n = \frac{0{,}2^n - 0{,}3^n}{0{,}2^n + 0{,}3^n} \qquad n \neq 0$$

$$= \frac{(0{,}3)^n \left(\left(\frac{0{,}2}{0{,}3}\right)^n - 1\right)}{(0{,}3)^n \left(\left(\frac{0{,}2}{0{,}3}\right)^n + 1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

et $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc par somme puis quotient

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$