

Devoir n° 8 : Fonction ln (1h)

I Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = xe^{1-x^2}.$$

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a) On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x ,

$$f'(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2}.$$

- b) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

- a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
- c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4. a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
 - b) Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un unique point commun, noté A .
 - c) Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.