

Devoir de Mathématiques N° 10 (1h15 min) - Test calcul d'intégrales

I Calculer les intégrales suivants :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(2x+3)^3} dx$$

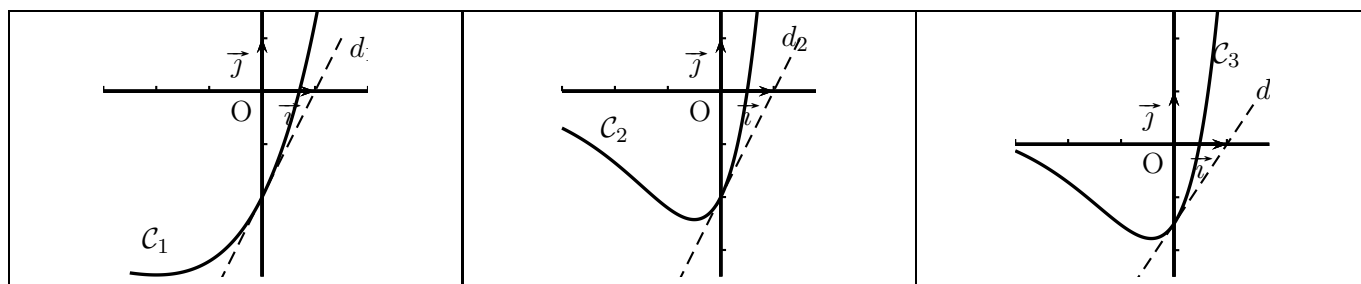
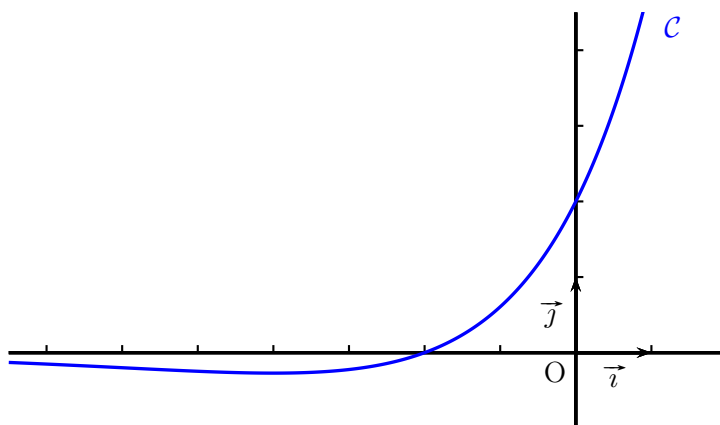
$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^{3x+1}}{1+e^{3x}} dx$$

$$I_3 = \int_0^2 (x^2+1)^2 dx$$

II Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C} et trois autres courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - a) À l'aide de la courbe \mathcal{C} , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe \mathcal{C} permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$.

b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.

a) Interpréter géométriquement le réel I .

b) Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

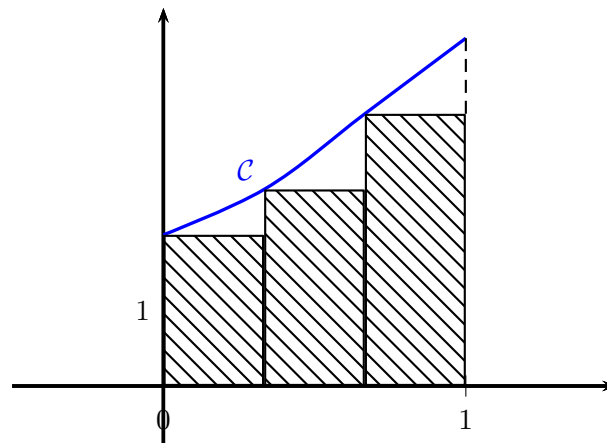
c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?