DS 3. (suites)

I ① $u_n = 2^{2n} - 3^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

$= 4^n - 3^n$

$= 4^n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

$\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$;

$4 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$.

Alors par produit ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

② On a $v_n = 1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (somme des termes d'une suite géom)

$$= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.

③ $w_n = \dfrac{\sin(n^3)}{n^2+1}$; $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $-1 \leq \sin(n^3) \leq 1$

donc $-\dfrac{1}{n^2+1} \leq w_n \leq \dfrac{1}{n^2+1}$ ($\div (n^2+1)$ avec $n^2+1 > 0$)

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2+1} = 0$ donc par th des Gendarmes

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

④ $z_n = \dfrac{0,2^n - 0,3^n}{0,2^n + 0,3^n}$

$$= \frac{(0,3)^n\left(\left(\frac{0,2}{0,3}\right)^n - 1\right)}{(0,3)^n\left(\left(\frac{0,2}{0,3}\right)^n + 1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -1$

II ① On a $u_0 = 0,3$ et $u_{n+1} = 0,9\,u_n(1-u_n)$

donc $u_1 = 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,7$

$= 0,189$ donc en 2001, il y a 189 tortues

$u_2 = 0,9 \cdot 0,189 \cdot (1-0,189) \simeq 0,138$

donc en 2002, il y a 138 tortues

②ⓐ On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 1$ donc par produit par $-1 < 0$

on a $0 \geq -u_n \geq -1$

et donc $1 \geq 1-u_n \geq 0$

Alors $0 \leq 1-u_n \leq 1$

donc $0 \leq 0,9u_n(1-u_n) \leq 0,9\,u_n$ $(\times 0,9u_n$ avec $0,9u_n \geq 0)$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9\,u_n$.

②ⓑ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 0,3 \cdot 0,9^n$

Initialisation : pour $n = 0$; $u_n = u_0 = 0,3$ et $0,3 \cdot 0,9^0 = 0,3$

donc ça marche

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$;

supposons $0 \leq u_k \leq 0,3 \cdot 0,9^k$

D'après (2a) (qui est valable $\forall n$) on a $0 \leq u_{k+1} \leq 0{,}9 u_k$

et par hypothèse de récurrence $u_k \leq 0{,}3 . 0{,}9^k$

donc on déduit $0 \leq u_{k+1} \leq 0{,}9 . 0{,}3 . 0{,}9^k$

et ainsi $0 \leq u_{k+1} \leq 0{,}3 . 0{,}9^{k+1}$

Hérédité démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9^n . 0{,}3$.

(2c) $|0{,}9| < 1$ donc par Th ; $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$.

alors d'après le th des Gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Les tortues vont disparaître. ☹

III (1) $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$; $x \geq 0$.

f dérivable et $f'(x) = \dfrac{(1+2x).3 - 3x.2}{(1+2x)^2}$

$= \dfrac{3}{(1+2x)^2}$

On a donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

(2) et (3) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Initialisation : $u_1 = f(u_0) = f(0{,}7) = \dfrac{3.0{,}7}{1+2.0{,}7} = 0{,}875$; $u_0 = 0{,}7$

ainsi Initialisat° ok.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$

Alors f étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a $0 \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1)$

et donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$

Ainsi l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

donc (u_n) est une suite croissante telle que $0 \leq u_n \leq 1$

④ (u_n) croissante et majorée par 1 donc (u_n) converge vers $\ell \in [0,1]$.

⑤ On a $f(\ell) = \ell \iff \frac{3\ell}{1+2\ell} = \ell$

$\iff 3\ell = \ell(1+2\ell) \iff 2\ell^2 - 2\ell = 0$

$\iff 2\ell(\ell - 1) = 0$

donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$

et $u_0 = 0{,}7$ avec $(u_n) \nearrow$ donc $\ell = 1$.

IV $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+2u_n}$ et $v_n = \frac{3}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

① On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1}}$

$= 3 \cdot \frac{3+2u_n}{3u_n} = \frac{3+2u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} + 2$

$= v_n + 2$

ainsi (v_n) arithmétique de raison 2.

② Par th on déduit $v_n = v_0 + nr$

$= 1 + 2n$.

alors comme $v_n = \frac{3}{u_n}$ on déduit $u_n = \frac{3}{v_n}$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{u_n = \frac{3}{1+2n}}$.

③ $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+2n) = 0$ donc par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

IV ① La première affirmation est vraie

Montrons par récurrence que $t_n = \frac{n}{n+1}$.

Init : $t_0 = 0$ ok

Hérédité : On suppose $t_k = \frac{k}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé.

alors $t_{k+1} = t_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

hérédité montrée.

Conclusion : On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$; $t_n = \frac{n}{n+1}$

② Affirmation fausse.

Contre exemple : $v_n = (-1)^n$ satisfait $-1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

mais (v_n) ne converge pas.

③ Affirmation vraie.

En effet, on a alors $u_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ car (v_n) Cvge.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.