Devoir n° 1

Terminale
21 sept 2020

I On a $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 1$; $u_0 = 3/2$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_n \leq 2$.

Initialisati.

. Pour $n=0$ $u_0 = 3/2$ et donc $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$.

. Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $1 \leq u_k \leq 2$

Montrons qu'il en est de même pour u_{k+1} :

On a $1 \leq u_k \leq 2$

donc $1-1 \leq u_k - 2 \leq 0$

donc $1 \geqslant (u_k - 2)^2 \geqslant 0$ (car $x \longmapsto x^2 \searrow$ sur $\mathbb{R}_-$)

donc $2 \geqslant u_{k+1} \geqslant 1$

et on a bien l'hérédité

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_n \leq 2$.

II . $u_n = n^3 - \frac{1}{n^2}$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ par th

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ par th.

Donc par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- $v_n = 2n^3 - 5n^4$

$= n^4\left(\frac{2}{n} - 5\right)$

$\lim_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} - 5 = -5$

Donc par produit $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

- $w_n = n^2 - n(-1)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc $\quad n \geq -(-1)^n n \geq -n \quad$ ($\times -n$ avec $-n < 0$)

donc $\quad n^2 + n \geq w_n \geq n^2 - n$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq n^2 - n$.

et $\quad n^2 - n = n(n-1)$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ donc par produit $\lim_{n\to+\infty} n^2 - n = +\infty$

ainsi par th de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

- $z_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, somme des termes d'une suite géométrique

$= \dfrac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2}$

$= 2.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc par th $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc par produit, $\lim_{n\to+\infty} z_n = 2$

III ① $u_{n+1} = u_n - n^3 - 1$; $u_0 = 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = -n^3 - 1 < 0$

donc (u_n) est décroissante.

② $v_{n+1} = v_n^2 + 3v_n + 1$; $v_0 = 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} - v_n = v_n^2 + 2v_n + 1$

$= (v_n + 1)^2 \geq 0$ (c'est un carré)

donc (v_n) est croissante

IV ① D'après le graphique il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

② $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$= -\frac{2}{3} u_n + 5 - 3$ par définition de (u_n)

$= -\frac{2}{3} u_n + 2$

$= -\frac{2}{3} (u_n - 3) = -\frac{2}{3} v_n$.

En conséquence (v_n) est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$

et de premier terme $v_1 = u_1 - 3 = -\frac{7}{2}$.

③ On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$

c'est-à-dire $v_n = -\frac{7}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(c) On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3$

c'est-à-dire $u_n = -\frac{7}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$

et $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ donc par Th : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

donc par produit puis somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$.

IV (1) On trace $\mathcal{D}$ sur le graphique et on conjecture que pour $m \simeq 1,3$, on a un point d'intersection

pour $m > 1,3$ il n'y a pas de point d'intersect°

pour $m \leq 1,3$ avec $m \neq 0$ on a deux points d'intersect°

pour $m = 0$ nous aurons un seul point d'intersect°

(2) Démonstration :

Soit $M(x;y) \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{D}$

$\iff \quad mx^2 = -x - 2$

$\iff \quad mx^2 + x + 2 = 0$

Supposons $m \neq 0$; alors on a une équation de degré 2.

$\Delta = 1 - 8m$

et le signe de Δ est donné par le tableau suivant

m	$-\infty$	0	$1/8$	$+\infty$
Δ	$+$	$\|\|$ $+$	0	$-$

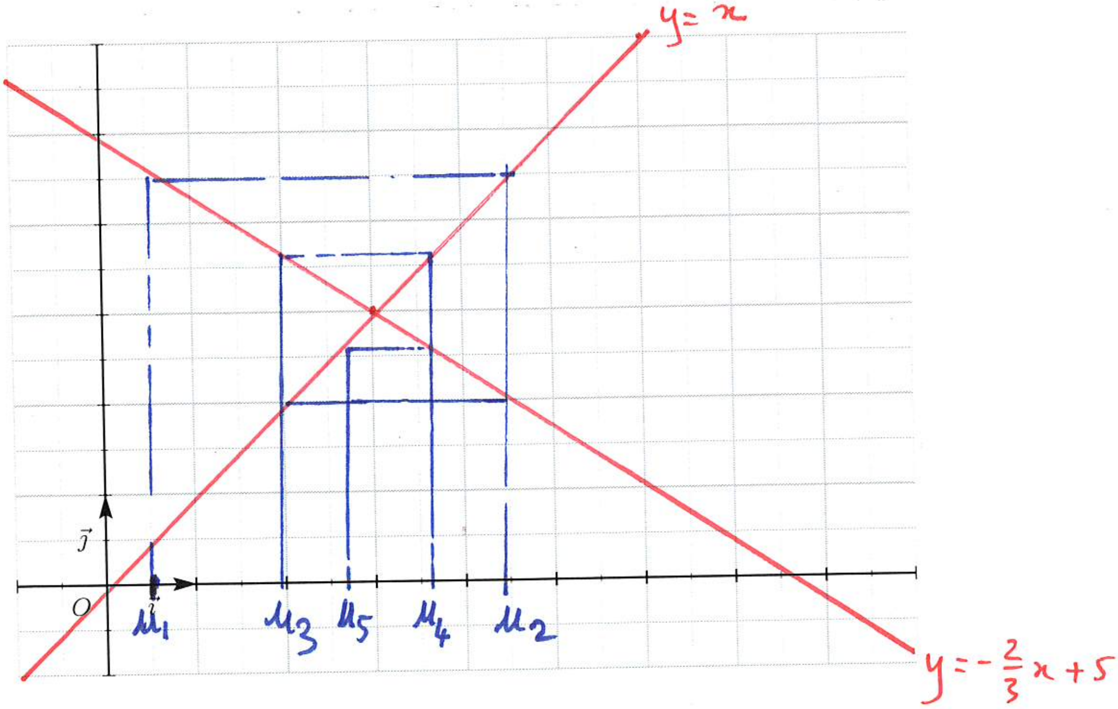
D'après ce tableau :

pour $m > 0{,}125$ pas de pt d'intersect°.
pour $m = 0{,}125$ un seul pt d'intersect°.
pour $m < 0{,}125$ avec $m \neq 0$ on a deux pts d'intersect°.

En fin, si $m = 0$; $f_m(x) = 0 \quad \forall x$.

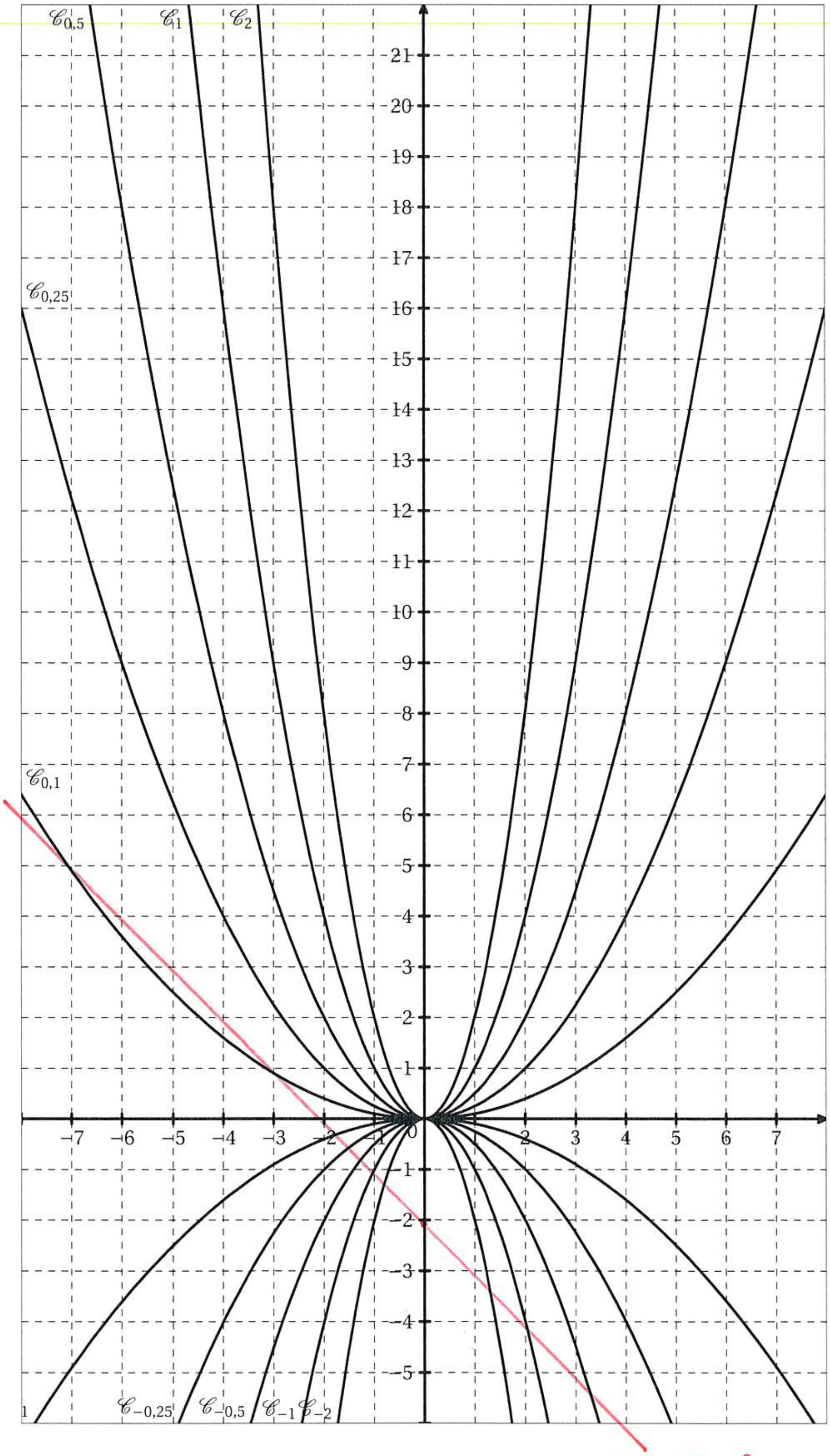
et donc $\# \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D} = 1$ (intersect° de deux droites)

La conjecture est démontrée.



(V) **(3 points)** Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère les fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^2$. Vous trouverez le sur le graphe ci-dessous le graphe $\mathscr{C}_m$ de certaines fonctions f_m.
On considère $\mathscr{D}$ la droite d¡équation $y = -x - 2$.

1. Conjecturer selon les valeurs de m le nombres de points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$.
2. Démontrer votre conjecture par le calcul.



$y = -x - 2$

(VI✳) **(bonus)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$ on a :

$$2^n \geq n^2$$