Devoir n° 7 - 21 décembre 2020

I **1** $y' - 3y = 2$

$\Leftrightarrow \quad y' = 3y + 2$

On a une équation de la forme $y' = ay + b$ donc par théorème les solutions sont les fonctions $f(x) = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et C constante

De plus $f(1) = 0 \Leftrightarrow \quad Ce^3 - \frac{2}{3} = 0$ donc $C = \frac{2}{3}e^{-3}$

Donc $f(x) = \frac{2}{3}e^{3(x-1)} - \frac{2}{3}$

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a
$$g'(x) - 2g(x) = (xe^{2x})' - 2xe^{2x}$$
$$= e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x}$$
$$= e^{2x}$$

Donc g est bien solution de $y' - 2y = e^{2x}$

II Partie A :

1 $\frac{1}{e}$ est l'abscisse de A et 1 celle de B
ainsi $f'(\frac{1}{e})$ est le coefficient dir de T_A donc $f'(\frac{1}{e}) = 0$
et $f'(1)$ est le coeff dir de T_B donc $f'(1) = -1$

2 D'après le graphique $T_B : y = -x + 3$.

Partie B : $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$

1 $f(\frac{1}{e}) = \frac{2 - \ln e}{1/e} = e$ donc $A(\frac{1}{e} ; e) \in \mathcal{C}_f$

$f(1) = \frac{2 - \ln 1}{1} = 2$ donc $B(1;2) \in \mathcal{C}_f$.

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses lorsque $f(x) = 0$
$$\Leftrightarrow 2 + \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -2$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-2} \quad (\text{car } \exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+^*})$$

Donc $\mathcal{C}_f$ coupe (Ox) en $K(e^{-2} ; 0)$

② Limite en 0^+ : On a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} 2 + \ln x = -\infty$

Et donc par quotient, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$: On a $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

Par théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Donc par somme, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

③ $\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{x \frac{1}{x} - (2 + \ln x)}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$

④ Nous avons besoin du signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0 \iff -1 - \ln x > 0$

$\iff \ln x < -1$

$\iff x < e^{-1}$ (car exp s. ↗ sur $\mathbb{R}$)

D'où le tableau de variations de f.

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	e	↘	0

⑤ $\forall x > 0$; On a $f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$

Donc $f''(x) = \frac{x^2(-1/x) + 2x(1 + \ln x)}{x^4}$

$= \frac{-x + 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 + 2\ln x}{x^3}$

↳ La convexité de f est donnée par le signe de $f''(x) = \frac{1+2\ln x}{x^3}$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^3>0$ donc $f''(x)>0 \iff 1+2\ln x>0$

$\iff \ln x > -\frac{1}{2} \iff x > e^{-1/2}$ (car exp strictement ↑ sur $\mathbb{R}$)

On déduit donc que f est convexe sur $[e^{-1/2};+\infty[= [\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty[$

III Partie A : $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

① Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

Donc par inverse, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Limite en 1 :

x	0		1	
$\ln x$		$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to1^+} \ln x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1} x = 1$ donc par quotient, $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$

② f est dérivable et $\forall x>1$, $f'(x) = \frac{\ln x - x\cdot 1/x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

Sur $]1;+\infty[$: $(\ln x)^2>0$ et donc $f'(x)>0 \iff \ln x - 1>0$

$\iff \ln x > 1$

$\iff x > e$ (car exp strictement ↑ sur $\mathbb{R}$)

On en déduit le tableau de variations de f

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Avec $f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$

③ Sur $[e,+\infty[$, f est croissante donc pour $x \geq e$, $f(x) \geq f(e)$ et donc $f(x) \geq e$

Partie B : ① Ok

② a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geqslant e$

Initialisation : Pour $n=0$; $u_0 = 5 \geqslant e$ donc Init ok

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $u_k \geqslant e$

Alors d'après la partie A, $f(u_k) \geqslant e$ et donc $u_{k+1} \geqslant e$ donc hérédité démontrée

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant e$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$$= \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$$

Et $u_n \geqslant 0$; $u_n \geqslant e$ donc $\ln u_n \geqslant 1$ et donc $1 - \ln u_n \leq 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par e, donc par th, (u_n) converge vers $\ell \geqslant e$

d) • $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

• (u_n) converge vers $\ell \geqslant e$

• f continue sur $]1 ; +\infty[$

Donc d'après le théorème du point fixe ℓ satisfait $f(\ell) = \ell$

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{\ell}{\ln \ell} = \ell \iff \ell\left(\frac{1}{\ln \ell} - 1\right) = 0 \iff \ell\left(\frac{1 - \ln \ell}{\ln \ell}\right) = 0$$

$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \ln \ell = 1$$

$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = e$$

Et $\ell \geqslant e$ donc $\ell = e$

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

IV Partie A : 1 $f_1(x) = xe^{-x}$

Limite en $+\infty$: $f_1(x) = \frac{x}{e^x}$ et donc par inverse de la croissance comparée, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

et donc (O_x) asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Limite en $-\infty$:

On a $f(x) = xe^{-x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc par produit, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

2 f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x})$

$= e^{-x}(1-x)$

Donc $f_1'(x)$ est du même signe que $1-x$ d'où le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Avec $f_1(1) = e^{-1}$

Partie B : 1 $f_k(x) = kxe^{-kx}$; $k > 0$

$\forall k > 0$; $f_k(0) = 0$ donc $O(0;0) \in \mathcal{C}_k$ $\forall k > 0$

2 a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = ke^{-kx} - kx(k)e^{-kx}$

$= ke^{-kx}(1 - kx)$

b $\forall x \in \mathbb{R}$; $k > 0$, on a $ke^{-kx} > 0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $1-kx$ (affine)

On a donc le tableau de variations de f_k :

x	$-\infty$		$1/k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

Avec $f_k(1/k) = k \cdot \frac{1}{k} e^{-k \cdot 1/k} = e^{-1}$

En particulier f_k admet pour maximum e^{-1} atteint en $x = 1/k$

(c) Le maximum a lieu en $\frac{1}{k}$; donc pour C_2 le max est en $\frac{1}{2}$ et pour C_a le max est en $\frac{1}{a}$.

D'après le graphique $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ donc $a > 2$

(d) Par théorème la tangente en 0 à C_k a pour équation

$T_k : y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0)$ avec $f_k'(0) = k$ et $f_k(0) = 0$

Donc $T_k : y = kx$

(e) D'après le graphique, la tangente tracée à C_b a pour coeff dir 3

Ainsi cela signifie que $b=3$ (Et cela se vérifie car le max est bien atteint en $\frac{1}{3}$)