Terminales
13/10/21

DS N°4.

I

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \; ; \; u_0 = 1$

1 On a $u_1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$

et $u_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1$
$= \frac{1}{16}(21 + 4 + 16)$
$= \frac{41}{16}$

2a Dans B3, il faut saisir : = (3/4) x B2 + (1/4) x A2 + 1

2b On peut conjecturer que (u_n) est croissante.

3 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq u_n \leq n+1$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et donc ça marche.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose que $k \leq u_k \leq k+1$ et on montre $k+1 \leq u_{k+1} \leq k+2$

On a $k \leq u_k \leq k+1$

donc $\frac{3}{4}k \leq \frac{3}{4}u_k \leq \frac{3}{4}k + \frac{3}{4} \qquad (\times \frac{3}{4} \text{ avec } \frac{3}{4} > 0)$

donc $\frac{3}{4}k + \frac{1}{4}k + 1 \leq \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4}k + 1 \leq \frac{3}{4}k + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}k + 1 \qquad (+ \frac{1}{4}k + 1)$

donc $k+1 \leq u_{k+1} \leq \underbrace{k + \frac{7}{4}}_{\leq k+2}$

donc $k+1 \leq u_{k+2} \leq k+2$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq u_n \leq n+1$

4a Au rang n : $n \leq u_n \leq n+1$

Au rang $n+1$: $n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$

On déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq n+1 \leq u_{n+1}$
et donc (u_n) est une suite croissante.

D'autre part, $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc par comparaison, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

4b D'après 3 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \leq u_n \leq n+1$

donc $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ $(\div n$ avec $n > 0)$

Et $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ donc par théorème des Gendarmes : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{n}\right) = 1}$

5 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$$
$$= \frac{3}{4} u_n + \frac{n}{4} + 1 - n - 1$$
$$= \frac{3}{4} u_n - \frac{3n}{4}$$
$$= \frac{3}{4} (u_n - n)$$
$$= \frac{3}{4} v_n.$$

En conséquence, (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ avec $v_0 = u_0 = 1$

5b On a donc par théorème $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$
$= \left(\frac{3}{4}\right)^n$

et comme $v_n = u_n - n$, on déduit, $u_n = v_n + n$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n}$

5c $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

Alors par somme, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

II **1** $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = n^2 - 42n + 4$

Un rapide calcul de tête nous donne à voir le TV :

x	21
$p(x)$	↘ ↗

En particulier on va avoir $P_{22} > P_{21}$

En effet : $P_{21} = -437$; $P_{22} = -436$ et donc (P_n) n'est pas décroissante

L'affirmation est fausse

2 Un petit tableau à la calculatrice semble nous indiquer que (v_n) géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1$$
$$= \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{1}{9}(u_n^2 + 8) - 1$$
$$= \frac{1}{9}u_n^2 - \frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{9}(u_n^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{9}v_n.$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est bien géométrique de raison } q = \frac{1}{9}}$

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$

donc $\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq w_n \leq \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$

Et $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1}$

$= \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

Et $\frac{n^2+n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1$

Alors par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ Affirmat° vraie.

III Partie A

1 $u_1 = f(u_0)$

$= \frac{11}{7}$

2 On a $f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$ pour $x \in [0;4]$

Donc $\forall x \in [0,4]$, $f'(x) = \frac{(4+x)3-(2+3x)}{(4+x)^2}$

$= \frac{10}{(4+x)^2}$

$10>0$ et $(4+x)^2>0$ sur $[0,4]$ donc par quotient $f'(x)>0$

et donc f est croissante sur $[0;4]$

3 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

Initialisation : pour $n=0$, on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3$

et montrons $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3$

On a $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3$

donc $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(3)$ Car $f \nearrow$ sur $[0,4]$

donc $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \frac{11}{7}$ et $\frac{11}{7} \leq 3$ donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

4a D'après ce qui précède, (u_n) est décroissante et minorée par 1. Donc par théorème (u_n) converge vers $\ell \in [1;3]$.

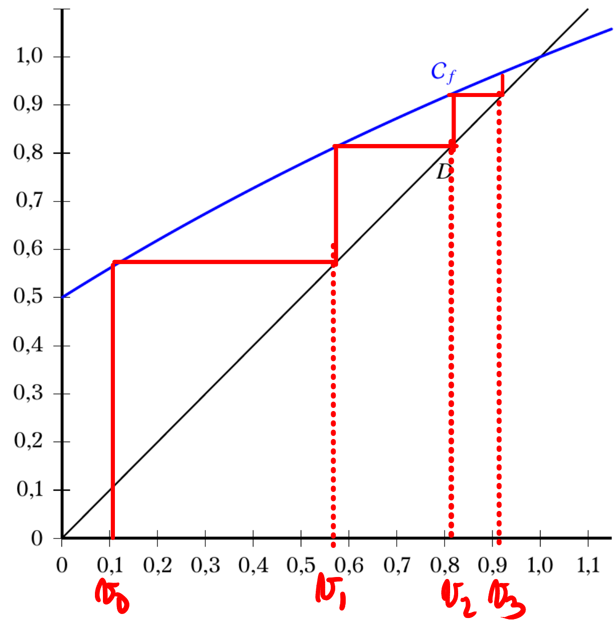
4b On a $\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$

$$\Leftrightarrow \ell^2 + 4\ell = 2 + 3\ell$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell + 2) = 0 \quad (\ell = 1 \text{ est racine évidente})$$

donc $\ell = 1$ ou $\ell = -2$ (impossible car $\ell \in [1;3]$)

Partie B

1



La suite (v_n) semble croissante et semble converger vers 1.

2a $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - v_{n+1} = 1 - f(v_n)$

$$= 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n}$$

$$= \frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n}$$

$$= \frac{2-2v_n}{4+v_n}$$

$$= \frac{2(1-v_n)}{4+v_n}$$

$$= \left(\frac{2}{4+v_n}\right) \cdot (1-v_n)$$ qui est l'expression demandée.

2b Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisat°, pour $n=0$ $1-v_0 = 0{,}9$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc ça marche

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose $0 \leq 1 - v_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$
et on montre $0 \leq 1 - v_{k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

Remarque : On a $1 - v_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$
donc $v_k \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$
Et en particulier, $v_k \geq 0$.

On a $0 \leq 1 - v_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$

donc $0 \leq \frac{2}{4+v_k}(1-v_k) \leq \frac{2}{4+v_k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ $\left(\times \frac{2}{4+v_k}\right.$ car $v_k \geq 0$ donc $\left.\frac{2}{4+v_k} > 0\right)$

donc $0 \leq 1 - v_{k+1} \leq \frac{2}{4+v_k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ (*)

Mais $v_k \geq 0$ donc $4 + v_k \geq 4$
donc $\frac{1}{4+v_k} \leq \frac{1}{4}$ (par inverse)

donc $\frac{2}{4+v_k} \leq \frac{1}{2}$ ($\times 2$ avec $2>0$)

On déduit alors $\frac{2}{4+v_k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}$

Et donc avec (*) On a bien $0 \leq 1-v_{k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

L'hérédité est montrée.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1-v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3 $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-v_n = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$