DS N°6

TVI et Continuité.

I $f(x) = e\sqrt{x}$; $D = \mathbb{R}_+$

1 f dérivable pour $x > 0$ et $f'(x) = \frac{e}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq e^2$

Initialisation : $u_0 = 1$; $u_1 = e$ donc on a bien $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq e^2$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq e^2$ et montrons que $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq e^2$.

On a $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq e^2$

donc $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(e^2)$ (Car f est une f° croissante sur $\mathbb{R}_+$)

donc $e \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq e\sqrt{e^2}$

Donc en particulier : $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq e^2$ et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a bien $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq e^2$

3 D'après la question précédente, on a (u_n) croissante et majorée par e^2

Donc par théorème, (u_n) converge vers une limite $\ell \in [1 ; e^2]$

4

On a : • $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

• (u_n) converge vers $\ell \in [1 ; e^2]$

• f est continue sur $[1 ; e^2]$ (puisque dérivable)

Donc d'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$

Donc $\quad e\sqrt{\ell} = \ell$

$\iff e = \sqrt{\ell}$ (en divisant par $\sqrt{\ell} \neq 0$ car $\ell \in [1; e^2]$)

$\iff \ell = e^2$

Finalement, (u_n) converge vers e^2

5 Affirmation 1 : $u_0 = 2021$; alors $u_1 = e\sqrt{2021}$

≈ 122

La suite (u_n) n'est donc pas croissante. Affirmation fausse

Affirmation 2 : Si $u_0 = 2$; alors $u_1 = e\sqrt{2}$

$\approx 3{,}8$

et on a donc bien $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq e^2$

Ainsi donc, l'initialisation de la récurrence est encore correcte et l'hérédité est encore valable. L'affirmation est donc vraie.

Affirmation 3 : (u_n) constante ssi $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$

Et $u_{n+1} = u_n$

$\iff e\sqrt{u_n} = u_n$

$\iff e\sqrt{u_n} - u_n = 0$

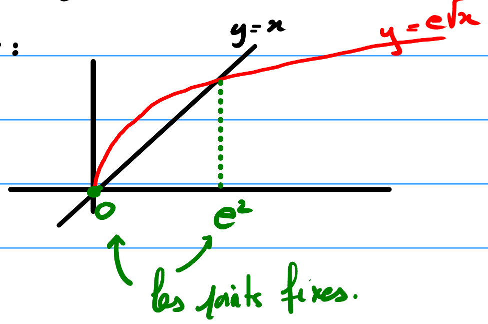
$\iff \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) = 0$

$\iff \sqrt{u_n} = 0$ ou $\sqrt{u_n} = e$

$\iff u_n = 0$ ou $u_n = e^2$

Finalement (u_n) est stationnaire ssi $u_0 = 0$ ou $u_0 = e^2$.

C'est normal, il s'agit des deux points fixes :



L'affirmation est donc fausse.

II Partie 1.

1 $g(x) = e^x - xe^x + 1$ pour $x \geqslant 0$

$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = e^x(1-x) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x = -\infty$

Donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(1-x) = -\infty$ et par somme $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

2/3 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \quad g'(x) = e^x - e^x - xe^x$
$= -xe^x$

Sur $\mathbb{R}_+$, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-x < 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, on déduit le tableau de variations de g :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

4a Sur $[0;+\infty[$

- g est strictement décroissante
- g est continue puisque dérivable
- $g(0) = 2$; $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ et $0 \in]-\infty;2]$

Ainsi par corollaire du TVI, $\exists! \, \alpha \in [0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$

4b Le programme est le suivant :

```
h = 0,1
a = 0
while g(a)g(a+h) > 0:
      a = a + h
print(a ≤ α ≤ a+h)
```

4c La calculatrice donne $1,27 < \alpha < 1,28$

4d $g(\alpha) = 0$ donc $e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$

donc $e^{\alpha}(1-\alpha) = -1$

et alors $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5 D'après le tableau de variations de g :

x		α	
$g(x)$	$+$	0	$-$

Partie 2 :

$A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$ sur $[0, +\infty[$

1 A dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $A'(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)^2} \cdot \left((e^x+1) \cdot 4 - e^x 4x \right)$

$$= \frac{4}{(e^x+1)^2} \left(e^x - x e^x + 1 \right)$$

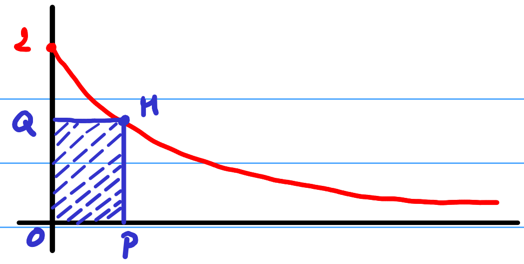
$$= \frac{4}{(e^x+1)^2} g(x)$$

Sur $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{4}{(e^x+1)^2} \geq 0$ donc par produit, $A(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2 On a alors le tableau de variations suivant pour A :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

Partie 3:



1 L'aire de OPMQ est $\mathcal{A}(x) = OP \times OQ$

$$= x \cdot f(x)$$

$$= \frac{4x}{e^x+1}$$

Donc l'aire est donnée par la fonction A vue dans la partie 2

Dans la partie 2, nous avons vu que A est maximale en α et vaut alors $A(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha+1}$

$$= \frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} \quad \text{(d'après partie 1.4.d)}$$

$$= \frac{4\alpha}{\alpha} \cdot (\alpha-1)$$

$$= 4(\alpha-1)$$

Alors comme $1{,}27 \leq \alpha \leq 1{,}28$

on a $0{,}27 \leq \alpha - 1 \leq 0{,}28$

et donc $1{,}08 \leq A(\alpha) \leq 1{,}12$

2 La tangente T en M au point d'abscisse α a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

La droite (PQ) a pour coeff directeur $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

$$= \frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha}$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

Montrer que $T \parallel (PQ)$ revient donc à montrer que $f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

On peut calculer la différence:

$$f'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\alpha} = -\frac{4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{4}{(e^\alpha+1)}$$

$$= \frac{4}{(e^\alpha+1)}\left(-\frac{e^\alpha}{e^\alpha+1} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Donc $f'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{4}{(e^{\alpha}+1)} \cdot \frac{-\alpha e^{\alpha} + e^{\alpha} + 1}{\alpha(e^{\alpha}+1)}$

$= \frac{4}{e^{\alpha}+1} \cdot \frac{g(\alpha)}{\alpha(e^{\alpha}+1)}$

$= 0$ car $g(\alpha) = 0$

Donc finalement : $f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ et donc $(PQ) \parallel T$