DS N°7

I Partie I

1 La formule saisie en B3 est : $= B2 - \ln(B2-1)$

2 On conjecture que (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Partie II

1 $f(x) = x - \ln(x-1)$ pour $x > 1$

On pose $X = x-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0^+$

$\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$

Alors par composée, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1) = -\infty$

Ainsi par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty}$

2.a On a $\forall x > 1$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$

$= \dfrac{x-2}{x-1}$ qui est l'égalité recherchée.

2b On déduit alors le signe de $f'(x)$ qui est le même que celui de $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}$ puis son tableau de variations.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Et $f(2) = 2 - \ln(2-1)$
$= 2$

2c D'après le tableau de variation, 2 est le minimum de f est donc
$\forall x \geqslant 2 \quad f(x) \geqslant 2$

Partie III

1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$

Initialisation : Pour $n=0$ $u_0 = 10 \geqslant 2$ ok

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose $u_k \geqslant 2$ et montrons $u_{k+1} \geqslant 2$

On a $u_k \geqslant 2$ donc d'après la partie II, $\underbrace{f(u_k)}_{=u_{k+1}} \geqslant 2$

Ainsi $u_{k+1} \geqslant 2$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$

Bien sûr, on pouvait aussi faire le 2 en 1 en montrant

$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

En effet d'après le TV de f, f est croissante sur $[2, +\infty[$

2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$= -\ln(u_n - 1)$

Et $u_n \geqslant 2$ donc $u_n - 1 \geqslant 1$

donc $\ln(u_n - 1) \geqslant 0$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $-\ln(u_n - 1) \leqslant 0$ ($\times(-1)$ avec $-1 < 0$)

donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

Et ainsi (u_n) est une suite décroissante

3 (u_n) est donc décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers $\ell \geqslant 2$

4
- $u_{n+1} = f(u_n)$
- u_n converge vers $\ell \geqslant 2$
- f est continue sur $]1; +\infty[$ (puisque dérivable)

Donc d'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$

Donc $\ell - \ln(\ell - 1) = \ell$

$\Leftrightarrow \ln(\ell - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = 1$

$\Leftrightarrow \ell = 2$

La suite (u_n) converge bien vers 2.

II $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$ pour $x > 0$.

1 $\forall x > 0$, $f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln x}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 4\frac{\ln x}{x}\right) = 1$ et par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

D'autre par $\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \frac{3}{x} = 4$ et donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$

2 $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 4 - 4\ln x - \frac{3}{x} \\ &= x + 4 - \frac{1}{x}\cdot 4x\ln x - \frac{1}{x}\cdot 3 \\ &= x + 4 - \frac{1}{x}\left(4x\ln x + 3\right) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$ (par croissance comparée)

Donc par somme et produit $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}(4x\ln x + 3) = +\infty$

Et donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{0^+} f = -\infty.}$

3 $\forall x > 0$ $f'(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

4a $\forall x > 0$, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ (car 1 est racine évidente)

et comme $x^2 > 0$, on déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		$\frac{3}{2} - 4\ln 2$		$+\infty$

$\frac{5}{3}$

$f(1) = 2$; $f(2) = 6 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

$= \frac{9}{2} - 4\ln 2$

$\approx 1{,}6$

4b $\frac{5}{3} \approx 1,67$; Ainsi, d'après le tableau de variations, le nombre de solutions de $f(x) = \frac{5}{3}$ est de 3

4c Sur $]0;3[$; 2 est le maximum de f, donc $f(x) = e$ n'a pas de solut.

Sur $[3;+\infty[$:

- f est continue car dérivable
- f est strictement croissante
- $f(3) \approx 1,6$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $e \approx 2,7$ intermédiaire à $f(3)$ et $+\infty$

Ainsi, par corollaire du TVI, il existe α unique dans $[3;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = e$

Au final $f(x) = e$ admet une unique solution α sur $]1;+\infty[$
et par balayage à la calculatrice : $6,85 \leq \alpha \leq 6,86$

5 $\forall x > 0$; $f''(x) = \dfrac{x^2(2x-4) - 2x(x^2-4x+3)}{x^4}$

$$= \frac{1}{x^3}(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6)$$

$$= \frac{1}{x^3}(4x-6)$$

$$= \frac{2}{x^3}(2x-3)$$

On a donc le tableau de convexité suivant :

x	x		$3/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		Concave		Convexe	

f'' s'annulle une seule fois en changeant de signe en $x = 3/2$.
On déduit que $\mathcal{C}$ présente un point d'inflexion en $A\left(\frac{3}{2} ; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{3/2}$
$= \frac{7}{2} - 4\ln\frac{3}{2}$ donc $A\left(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2} - 4\ln\frac{3}{2}\right)$

III 1 f'' s'annulle 3 fois en changeant de signe, donc 3 points d'inflexion.

Réponse b

2 En traçant à la calculatrice $f(x) = x^2 - 17x + 20$ et en sachant qu'une seule réponse est correcte, il est aisé de déduire que l'unique réponse est a

3 Il y a une erreur dans l'énoncé. Cette suite arithmético-géométrique converge vers 20 et ne dépasse jamais 45. Il n'y a pas de réponse correcte. S'il y en avait une, ce serait la réponse a

4 $f(x) = x e^{-2x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Alors $f'(x) = e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}$

$= e^{-2x}(1-2x)$;

(Ne pas oublier que $(e^u)' = u'e^u$)

On a alors

$$f''(x) = -2(1-2x)e^{-2x} - 2e^{-2x}$$
$$= (-4 + 4x)e^{-2x}$$
$$= 4(x-1)e^{-2x}$$

La réponse est donc b