DS n°9

I **1** On a $f'(0) = 15$ car le coeff directeur de la tangente en 0 vaut 15.
Rep c

2 $f(x) = (ax+b)e^x$

Alors $f(0) = b$ donc $b = 5$

D'autre part on sait que $f(-0{,}5) = 0$ donc $(-0{,}5a + b)e^{-0{,}5} = 0$

Il s'en suit $a = \frac{b}{0{,}5} = 10$. Donc $a = 10$; $b = 5$ **Rep a**

3 $f''(x) = (10x+25)e^x$ donc $f''(x)$ est du signe de $10x+25$

x		$-2{,}5$	
$10x+25$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

La réponse est donc c

4. Par élimination

a impossible car (u_n) peut tout simplement diverger. Par ex : $u_n = v_n - n$
avec diverger et satisfaire les conditions.

b Impossible. Par ex $v_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$

c Impossible. Par ex $u_n = v_n - \frac{1}{n}$ alors (u_n) converge vers 2.

La réponse est donc d. Demandez à votre prof pour une dém.

II ① $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$

donc $BC^2 = 5$; $BD^2 = 49+25+1 = 75$; $CD^2 = 36+25+9 = 70$

ainsi $BD^2 = BC^2 + CD^2$ et donc d'après le th de Pythagore BCD rectangle en C.

donc $\mathcal{A}(BCD) = \frac{1}{2} BC.CD$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{70} = \frac{5}{2}\sqrt{14}$ u.a.

② a) $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = -2+2 = 0$; $\vec{n}.\overrightarrow{BD} = -14+15-1 = 0$

donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$; $\vec{n} \perp \overrightarrow{BD}$ $\Longrightarrow$ $\vec{n}$ normal à (BCD)

b) On déduit donc $(BCD) : -2x+3y+z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$

et $B(-1;1;0) \in (BCD)$ donc $2+3+d=0$

$\Longrightarrow d=-5$

d'où $(BCD) : -2x+3y+z-5=0$

③ $\mathcal{D} \perp (BCD)$ donc $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\+3\\1\end{pmatrix}$

et $A(5;-5;2) \in \mathcal{D}$

donc $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -2t+5 \\ y = +3t-5 \\ z = t+2 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

④ $H(x;y;z) \in \mathcal{D} \cap (BCD) \iff \begin{cases} x = -2t+5 \\ y = +3t-5 \\ z = t+2 \\ -2x+3y+z-5=0 \end{cases}$

donc en particulier $-2(-2t+5)+3(+3t-5)+t+2-5=0$

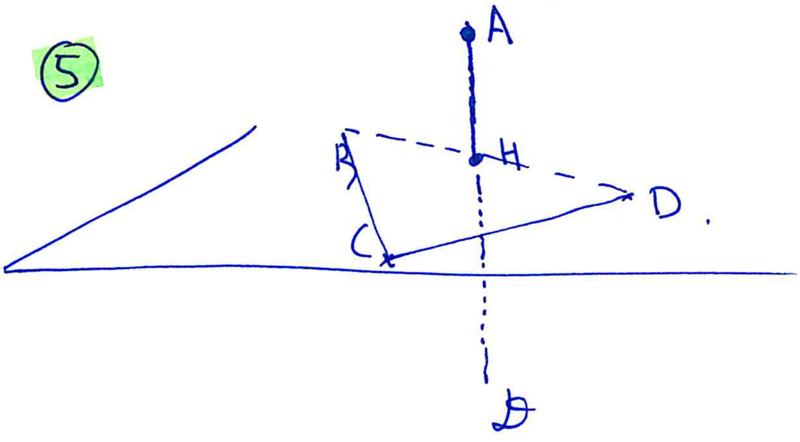
$\Leftrightarrow 4t - 10 + 9t - 15 + t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 14t = 28$

$\Leftrightarrow t = 2$

et donc $H(1\,;1\,;4)$

⑤



$A, H \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \perp (BCD)$; de plus $H \in (BCD)$

ainsi : (AH) est la hauteur du tétraèdre $BCDA$ issue de A et H est le pied de cette hauteur.

$$\mathcal{V}(BCDA) = \frac{1}{3}\, \mathcal{A}(BCD) \times AH$$

$$\vec{AH}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix} \Rightarrow AH^2 = 16 + 36 + 4 = 56 \Rightarrow AH = \sqrt{56} = \sqrt{4}\sqrt{14} = 2\sqrt{14}$$

donc $\mathcal{V}(BCDA) = \frac{1}{3}\,\frac{5}{2}\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}$

$$= \frac{14 \times 5}{3} = \frac{70}{3} \text{ u.V}$$

⑥ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB.AC \cos(\widehat{BAC}) \Rightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{AB.AC}$$

$$= \frac{30 + 36}{\sqrt{76}\sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{76}\sqrt{61}}$$

et à la calculatrice on détermine $\widehat{BAC} \approx 14{,}2°$.