DS N° 10

I **1** On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{4}{u_n} = 4+n$

2 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$ donc init ok

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $u_k > 0$ et montrons $u_{k+1} > 0$

$u_k > 0$ alors $4u_k > 0$ et $u_k + 4 > 0$

donc par quotient, $\frac{4u_k}{u_k+4} > 0$ et donc $u_{k+1} > 0$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n > 0}$

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n+4} - u_n$

$$= \frac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n+4}$$

$$= -\frac{u_n^2}{u_n+4}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 > 0$; $u_n + 4 > 0$ donc par quotient, $u_{n+1} - u_n < 0$
et ainsi (u_n) est décroissante.

4 (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers $\ell \geq 0$.

5 Soit $v_n = \frac{4}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{4}{u_{n+1}} - \frac{4}{u_n}$

$$= 4 \cdot \frac{u_n+4}{4u_n} - \frac{4}{u_n}$$

$$= \frac{u_n + 4 - 4}{u_n}$$

$$= 1$$

On déduit (v_n) arithmétique de raison $r = 1$ avec $v_0 = \frac{4}{u_0} = 4$

Par théorème, on a alors $v_n = v_0 + nr$
$= 4 + n$.

6 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{4}{u_n}$ et donc $u_n = \frac{4}{v_n}$

donc $u_n = \frac{4}{4+n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 4+n = +\infty$ et donc par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

II Partie 1 :

1 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $B(8,0,0)$ donc $\begin{cases} x_P = \frac{3}{4} 8 \\ y_P = 3/4 \cdot 0 \\ z_P = 3/4 \cdot 0 \end{cases}$ donc $P(6,0,0)$

de même pour Q : $Q(0,0,6)$

2 On a de plus $R(8,2,8)$ donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, ce sont donc des vecteurs directeurs de (PQR)

$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6+6=0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2-10+8=0$

Ainsi $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{PR}$ donc $\vec{n}$ normal à (PQR)

3 Alors par théorème : $(PQR) : x - 5y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

et $P(6,0,0) \in (PQR)$ donc $6 + d = 0$ et $d = -6$

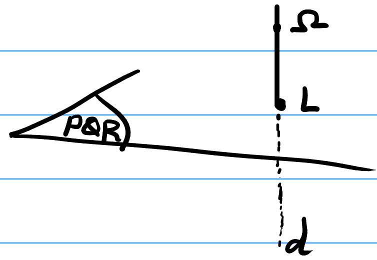
$(PQR) : x - 5y + z - 6 = 0$

Partie II :

1 Ω centre du cube est donc le milieu des grandes diagonales
Donc Ω milieu de $[AG]$.
or $A(0,0,0)$; $G(8,8,8)$ donc $\Omega(4,4,4)$

2 $d \perp (PQR)$ donc d a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ et d passe par Ω

donc $d : \begin{cases} x = t+4 \\ y = -5t+4 \\ z = t+4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$



3 L projeté orthogonal de Ω sur (PQR)
donc L est le point d'intersection de
(PQR) et d.

Soit $L(x,y,z)$: $L \in (PQR) \cap d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t+4 \\ y = -5t+4 \\ z = t+4 \\ x-5y+z-6=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow t+4-5(-5t+4)+t+4-6=0$ (avec $x = \cdots$, $y=\cdots$, $z=\cdots$)

$\Leftrightarrow 27t = 18$

$\Leftrightarrow t = \frac{18}{27}$
$= \frac{2}{3}$

Alors $L\left(\frac{2}{3}+4 ; -5.\frac{2}{3}+4 ; \frac{2}{3}+4\right)$ donc $\boxed{L\left(\frac{14}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{14}{3}\right)}$

4 $(\Omega L) \perp (PQR)$ et $L \in (PQR)$ donc $dist(\Omega, (PQR)) = \|\overrightarrow{\Omega L}\|$

et $\overrightarrow{\Omega L}\begin{pmatrix}2/3\\-10/3\\2/3\end{pmatrix}$ donc $\Omega L^2 = \frac{4}{9} + \frac{100}{9} + \frac{4}{9}$

$108 = 27.2.2$
$= 9.4.3$

$= \frac{108}{9}$ et donc $\Omega L = \frac{1}{3}\sqrt{108}$

$= \frac{1}{3} 3.2.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Alors $\boxed{dist(\Omega, (PQR)) = 2\sqrt{3} \text{ cm}}$