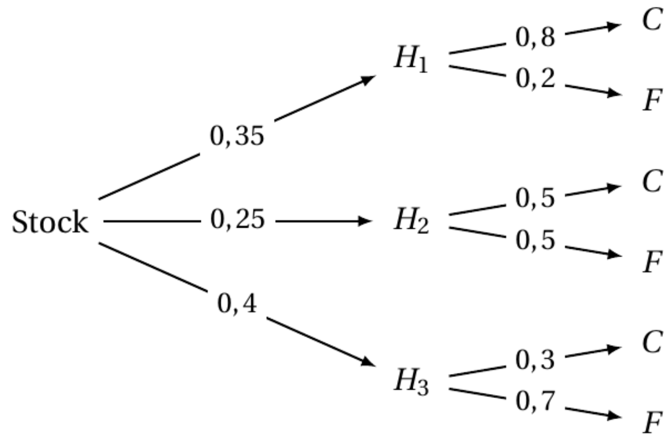
DS N° 11

I

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. **a.** L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :
$P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$
$0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :
$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533.$$

2. **a.** Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de 0,525 qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.

b On a $E(X) = np$
$= 5,25$ conifères.

Ceci veut dire que sur 10 arbres on a 5,25 conifères en moyenne.

c $P(X=5) = \binom{10}{5} 5,25^5 \, 4,75^5$
$\approx 0,243$

d Au moins deux feuillus est l'événement $(X \leq 8)$.

On a alors d'après la calculatrice : $P(X \leq 8) \approx 0,984$

Remarque : On peut aussi dire $P(X \leq 8) = 1 - P(X=9) - P(X=10)$

3a On a $\overline{A_n}$: " les n arbres sont des feuillus "

Alors $P(\overline{A_n}) = 0,475^n$ (Car on peut considérer que les tirages sont indépendants)

donc $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n})$

et on a donc bien $P(A_n) = 1 - 0,475^n$

3b On cherche à résoudre $P(A_n) \geqslant 0,9999$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,475^n \geqslant 0,9999$$
$$\Leftrightarrow 0,475^n \leqslant 0,0001$$
$$\Leftrightarrow n \ln 0,475 \leqslant \ln(10^{-4}) \quad (\text{Car } \ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-4\ln 10}{\ln(0,475)} \quad (\div \ln 0,475 \text{ avec } \ln 0,475 < 0)$$

et $\dfrac{-4\ln 10}{\ln(0,475)} \approx 12,4$

Donc à partir de $n = 13$, on a $P(A_n) \geqslant 0,9999$

3c De même qu'au 2, la v.a qui compte le nombre de conifères est $Y_n \sim \mathcal{B}(n ; 0,525)$

et on a $E(Y_n) = 0,525n$

On veut donc $E(Y_n) \geqslant 100$

c.à.d $0,525n \geqslant 100$

et donc $n \geqslant \dfrac{100}{0,525}$ c'est-à-dire $n \geqslant 191$

A partir de $n = 191$ arbres on aura 100 conifères en moyenne.

II $f(x) = xe^{x-1} + 1$; $x \in \mathbb{R}$

Partie A.

1. On a $f(x) = x.e^{x}.e^{-1} + 1$

par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

Donc par produit et somme, $\lim\limits_{-\infty} f = 1$

Ainsi, C_f admet une asymptote horizontale d'éq $y = 1$ en $-\infty$.

2 Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

3 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1}$

$= (1+x)e^{x-1}$

4 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1+x$

On déduit alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$1-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	

Avec $f(-1) = -e^{-2} + 1$

$= 1 - \frac{1}{e^2}$

Partie B: **1.** Je conjecture que le point de contact est en 1 et que la tangente a pour équation $y = 2x$.

2.

D'après le cours : $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Donc $y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$

Donc $y = (a+1)e^{a-1}x - a(a+1)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1$

Ce qui nous donne $\boxed{T_a : y = (a+1)e^{a-1}x - a^2e^{a-1} + 1}$

3 $O(0,0) \in T_a \iff 0 = -a^2e^{a-1} + 1$

$\iff 1 - a^2e^{a-1} = 0$

4 Soit $\varphi(x) = 1 - x^2e^{x-1}$; $x > 0$

On cherche à montrer que l'unique racine de φ est $x = 1$.

$\varphi(1) = 1 - 1 = 0$ donc 1 est racine de φ

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1}$

$= -xe^{x-1}(x+2)$

et sur $\mathbb{R}_+^*$, $xe^{x-1}(x+2) > 0$ (par produit) et donc φ strictement décroissante

On a donc le TV suivant pour φ :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$			
$\varphi(x)$	↘	0	↘

φ étant strictement décroissante, elle ne peut avoir qu'une seule racine*: c'est donc $x = 1$.

* Si elle en avait 2 ; a et b, alors $\varphi(a) = \varphi(b)$ et donc $a = b$ car $\varphi \downarrow$

5 d'après **3**, le point de contact a est racine de φ donc $a = 1$

La tangente est donc $\boxed{T_1 : y = 2x}$

Partie C : **1** On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{x-1} + (x+1)e^{x-1}$

$= (x+2)e^{x-1}$

2 $e^{x-1} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $x+2$. On a alors le tableau de convexité suivant.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	Concave		Convexe

Donc f concave sur $]-\infty, -2[$

f convexe sur $]2, +\infty[$

f admet un point d'inflexion pour $x = -2$