DS N° 12

I $f(x) = x - e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$

1

En $+\infty$: par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

En $-\infty$: par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^{-2x} = -\infty$

et par somme on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2e^{-2x}$

et sur $\mathbb{R}$, $1 > 0$; $e^{-2x} > 0$ donc par somme $f'(x) > 0$ d'où le tableau de var.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3 • f est continue sur $\mathbb{R}$

• f est strictement croissante

• $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et 0 intermédiaire à $-\infty$ et $+\infty$

Donc par corollaire du TVI, $\exists!\ \alpha > 0$ tels que $f(\alpha) = 0$

Par balayage à la calculatrice, on a $\alpha \approx 0{,}43$

4 D'après le tableau de variation :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Partie 2 : **1a** On a $O(0,0)$; $M(t\,;\,e^{-t})$ donc $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

Donc $OM^2 = t^2 + e^{-2t}$ et alors $h(t) = OM = \sqrt{t^2+e^{-2t}}$

1b On a $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = \dfrac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2+e^{-2t}}}$ $\left(\text{Car } (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \right)$

$$= \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2+e^{-2t}}}$$

$$= \frac{f(t)}{\sqrt{t^2+e^{-2t}}}$$

c Sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{t^2+e^{-2t}} > 0$ donc $h'(t)$ est du signe de $f(t)$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

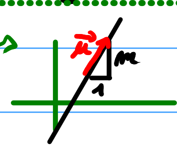
Avec $h(\alpha) = \sqrt{\alpha^2+e^{-2\alpha}}$

On sait que $OM = h(t)$, et d'après le tableau de variation de h, h est minimale en $t=\alpha$. La longueur OM correspondante est alors $h(\alpha)$ et le point M correspondant est $A(\alpha\,;\,e^{-\alpha})$

2.a On a $A(\alpha\,;\,e^{-\alpha})$ donc la tangente en A à $\mathcal{C} = \mathcal{C}_g$ est

$T : y = g'(\alpha)(x-\alpha) + g(\alpha)$

Rappel : Si $\Delta : y = mx+p$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ vect. dir



Le coeff directeur est $g'(\alpha) = -e^{-\alpha}$ et T a pour vecteur dir $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-\alpha} \end{pmatrix}$

D'autre part $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \alpha \\ e^{-\alpha} \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de (OA)

Ainsi, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA} = \alpha + e^{-\alpha}(-e^{-\alpha})$

$= \alpha - 2e^{-2\alpha}$

$= f(\alpha)$

$= 0$ donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{OA}$

et ainsi $T \perp (OA)$ (c'est pas beau ça?)

II 1a $\forall x \in [1;e]$ $x < e$

donc $\ln x < 1$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $(\ln x)^{n+1} < (\ln x)^n$ ($\times (\ln x)^n$ avec $(\ln x)^n > 0$ (car $x > 1$))

donc $x^2(\ln x)^{n+1} < x^2(\ln x)^n$ ($\times x^2$ avec $x^2 > 0$)

Ainsi l'inégalité est vérifiée.

1b Par intégration de l'inégalité entre 1 et e (avec $1 < e$)

$$\int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx < \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$$

et donc $I_{n+1} \leq I_n$ et ainsi (I_n) est décroissante.

2.a $\forall x \in [1;e]$: $\ln x \geq 0$ donc $(\ln x)^n \geq 0$

et donc $x^2(\ln x)^n \geq 0$

Alors par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre ($1 \leq e$)

on a

$$\int_1^e x^2(\ln x)^n dx \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire } I_n \geq 0$$

2b On a donc (I_n) décroissante et minorée, donc (I_n) converge vers $\ell \geq 0$.

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = \dfrac{e^3}{n+1} - \dfrac{3}{n+1} I_{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^3}{n+1} = 0$; $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = \ell$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3 I_{n+1}}{n+1} = 0$

Alors par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

4 On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx$

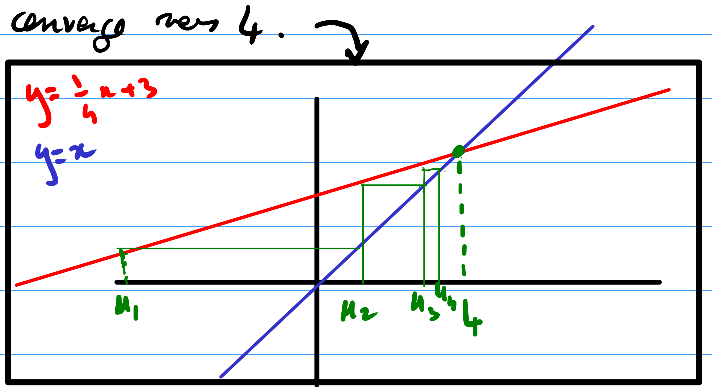
Par intégration par parties : $\quad u' = x^2 \qquad v = (\ln x)^{n+1}$

$\qquad u = \dfrac{x^3}{3} \qquad v' = (n+1)(\ln x)^n \cdot \dfrac{1}{x}$

Alors
$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot (n+1) \cdot (\ln x)^n \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

Ainsi on déduit $3 I_{n+1} + (n+1) I_n = e^3$

III **1** On trace la droite $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$.
On peut alors représenter les termes successifs de (u_n) et on conjecture $(u_n) \nearrow$ et converge vers 4.



2

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = u_{n+1} - 4$
$$= \frac{1}{4} u_n + 3 - 4$$
$$= \frac{1}{4}(u_n - 4)$$
$$= \frac{1}{4} v_n$$

Donc (v_n) géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ avec $v_1 = u_1 - 4$
$= -10$

2b Par théorème $v_n = v_1 q^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$

$= -10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

et donc $u_n = v_n + 4$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 4 - 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

2c $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

3 $u_n > 3{,}999 \iff 4 - 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} > 3{,}999$

$\iff 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0{,}001$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 10^{-4}$

$\iff (n-1) \ln \frac{1}{4} < -4 \ln 10$ (ln s.↗)

$\iff (n-1) > \frac{-4 \ln 10}{-\ln 4}$ ($\div - \ln 4$ avec $-\ln 4 < 0$)

$\iff n > \underbrace{4 \frac{\ln 10}{\ln 4} + 1}_{\approx 7{,}6}$

A partir de $n = 8$: $u_n > 3{,}999$.