DS N° 14

I Partie A

$f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{-bx}}$

1. On a $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{a = 1}$

2. $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{-(e^{-bx})'}{(1+e^{-bx})^2}$ (on a $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$)

$$= \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$$

3. La tangente à C_f en A est la droite (AB) qui a pour coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$= \frac{1/2}{10}$$

$$= \frac{1}{20}$$

Ainsi, on déduit $f'(0) = \frac{1}{20}$
ce qui donne

$$\frac{b}{2^2} = \frac{1}{20} \quad \text{et donc } \boxed{b = \frac{1}{5}}$$

On a alors $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-0,2x}}$

Partie B :

1. La proportion d'individus équipés au 1er janv 2010 est $p(10) = \dfrac{1}{1 + e^{-2}}$

$$\simeq 0,88$$

2.a D'après la partie A : pour $x \geqslant 0$, $\quad p'(x) = \dfrac{0{,}2\,e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2}$

La fonction exp étant positive, on déduit $p'(x) > 0$ donc p strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2.b $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}2x = -\infty$ donc par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}2x} = 0$

On déduit donc par somme puis quotient que $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = 1$

2c Au bout d'un certain nombre d'années, tous les individus sont équipés

3 On cherche x tel que $\quad p(x) \geqslant 0{,}95$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-0{,}2x}} \geqslant 0{,}95$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1+e^{-0{,}2x} \leqslant \frac{1}{0{,}95} \qquad (\text{par inverse})$$

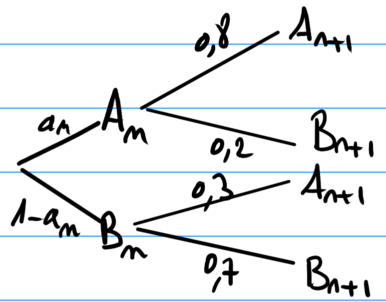
$$\Longleftrightarrow \quad e^{-0{,}2x} \leqslant \frac{0{,}05}{0{,}95}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -0{,}2x \leqslant \ln\left(\frac{5}{95}\right) \qquad (\text{car } \ln \text{ s.} \uparrow)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \geqslant \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{5}{95}\right)}{-0{,}2}}_{\approx 14{,}72}$$

Donc au bout 15 années, le marché est saturé.

II **1.a**



1.b A_n, B_n forme une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(A_{n+1}) = P(A_n).P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(A_{n+1})$$

$$= a_n . 0{,}8 + (1-a_n).0{,}3$$

$$= 0{,}5a_n + 0{,}3$$

Ainsi, on a bien $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$

2. On suppose $a_1 = a = \frac{1}{2}$.

a Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1$; $0 \leq a_n \leq 0{,}6$.

Init : c'est vrai pour $n=1$ car $a_1 = 0{,}5$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leq a_k \leq 0{,}6$ et montrons $0 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6$

On a $0 \leq a_k \leq 0{,}6$

donc $0 \leq 0{,}5a_k \leq 0{,}3$ $(\times 0{,}5$ avec $0{,}5 > 0)$

donc $0 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6$ $(+0{,}3)$

L'hérédité est montrée.

Conclusion : $\forall n \geq 1$; $0 \leq a_n \leq 0{,}6$.

2b $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = -0{,}5a_n + 0{,}3$

et $0 \leq a_n \leq 0{,}6$. donc par produit $0 \geq -0{,}5a_n \geq -0{,}18$

et par somme $0{,}3 \geq a_{n+1} - a_n \geq 0{,}12$

En particulier, (a_n) est croissante

2c (a_n) est croissante et majorée par $0{,}6$, elle converge donc vers $\ell \in [0;0{,}6]$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$, on déduit $\ell = \frac{\ell}{2} + 0{,}3$

et donc $\boxed{\ell = 0{,}6}$

3a $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6$

$= 0{,}5a_n - 0{,}3$

$= 0{,}5(a_n - 0{,}6)$

$= 0{,}5\, u_n$

Donc (u_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme $u_1 = a_1 - 0{,}6$
$= a - 0{,}6$

3b La forme explicite de (u_n) est

$u_n = u_1 . q^{n-1}$ donc $u_n = (a-0{,}6)\,0{,}5^{n-1}$

et on déduit donc $a_n = (a-0{,}6)0{,}5^{n-1} + 0{,}6$
(par déf de u_n)

3c. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$.

Cette limite ne dépend pas de a.

3d Au bout d'un grand nombre de parties, c'est le jeu A qui est le plus joué (60% des cas).

Les publicités devraient être insérées au début des parties A

Partie B: 1a L'expérience est assimilable à la répétition de 50 épreuves de Bernoulli de manière indépendante dont l'issue succès est la peluche est refusée avec pour probabilité $p = 1 - 0{,}8763$
$= 0{,}1237$

Donc par théorème, la v.a. X qui compte le nombre de succès est

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(50 ; 0{,}1237)}$

1.b. $P(X=6) = \binom{50}{6} \cdot 0{,}1237^6 \cdot 0{,}8763^{44}$

$\approx 0{,}1706$

Et $P(X>10) = 1 - P(X \leq 9)$

$\approx 0{,}0394$ (d'après la calculatrice)

2. a Si on tire n peluches et X compte le nombre de peluches refusées, alors $X \approx \mathcal{B}(n, 0{,}1237)$

Ainsi, $p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - P(X=0)$

$= 1 - 0{,}8763^n$

$p_n \geqslant 0{,}99 \iff 1 - 0{,}8763^n \geqslant 0{,}99$

$\iff 0{,}8763^n \leq 0{,}01$

$\iff n \ln(0{,}8763) \leq \ln 10^{-2}$ (car $\ln \nearrow$)

$\iff n \geqslant \underbrace{\dfrac{\ln 10^{-2}}{\ln(0{,}8763)}}_{\approx 34{,}9}$ (car $\ln 0{,}8763 < 0$)

Donc à partir de $n = 35$ peluches la proba d'avoir une peluche refusée dépasse 0,99.

III 1. $A(0,0,0)$; $B(1,0,0)$; $C(1,1,0)$; $D(0,1,0)$; $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$; $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$

Et $K(0,\frac{1}{4},0)$; $I(\frac{1}{2},0,1)$; $J(0,\frac{1}{2},1)$

2.a $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\1/4\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp (FHK) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{FH}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{FK}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=0\\ -a+\frac{b}{4}-c=0\end{cases}$

si on prend $a=4$ on a par exemple : $\begin{cases}a=4\\ b=4\\ c=-a+\frac{b}{4}\end{cases}$

donc $a=4$; $b=4$; $c=-3$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ normal à (IJK)

2b $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ normal à (IJK) donc (IJK) : $4x+4y-3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

et $F(1,0,1)\in(IJK)$ donc $4-3+d=0$ donc $d=-1$

Alors $(IJK): 4x+4y-3z-1=0$

2c $\mathcal{P} /\!/ (IJK)$ donc $\mathcal{P}$ a le même vecteur normal donc

$\mathcal{P}: 4x+4y-3z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

et $I(0,\frac{1}{2},1)\in\mathcal{P}$ donc $2-3+d=0$ et $d=1$

donc $\mathcal{P}: 4x+4y-3z+1=0$

2d (AE) a pour vecteur directeur $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et passe par $A(0,0,0)$

donc $(AE) : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

2e. $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \cap (AE)$ ssi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \\ -3t+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1/3 \\ t=1/3 \end{cases}$ et donc $\boxed{M\left(0,0,\frac{1}{3}\right)}$

(il est aisé de placer M)

3a $\Delta \perp \mathcal{P}$ et passe par $E(0,0,1)$

donc Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$

et donc $\Delta : \begin{cases} x=4t \\ y=4t \\ z=-3t+1 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

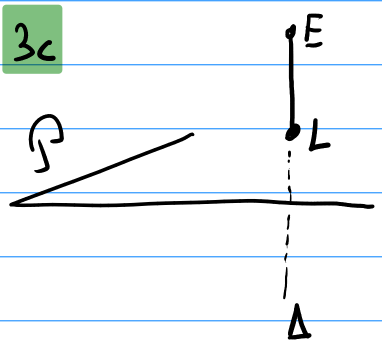
3b $L(x,y,z) \in \Delta \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow L(4t, 4t, -3t+1) \in \mathcal{P}$

$\Leftrightarrow 4.4t + 4.4t - 3(-3t+1)+1=0$

$\Leftrightarrow 41t=2$

$\Leftrightarrow t=\frac{2}{41}$ et donc $\boxed{L\left(\frac{8}{41} ; \frac{8}{41} ; \frac{35}{41}\right)}$

3c



$\Delta \perp \mathcal{P}$ et Δ passe par E donc

$dist(E,\mathcal{P}) = LE$

On a $\vec{EL}\begin{pmatrix} 8/41 \\ 8/41 \\ -6/41 \end{pmatrix}$ et donc $LE^2 = \left(\frac{8}{41}\right)^2 + \left(\frac{8}{41}\right)^2 + \left(\frac{6}{41}\right)^2$

Donc $LE^2 = \frac{164}{41^2}$ Donc $LE = \frac{\sqrt{164}}{41}$

$= \boxed{\frac{2\sqrt{41}}{41}}$

4d On a $(BF) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$M(x,y,z) \in \Delta \cap (BF) \iff \begin{cases} 4t = 1 \\ 4t = 0 \\ -3t+1 = \lambda \end{cases}$ ce qui est impossible

donc $\boxed{\Delta \cap (BF) = \emptyset}$

De même : $(CG) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$M(x,y,z) \in \Delta \cap (CG) \iff \begin{cases} 4t = 1 \\ 4t = 1 \\ -3t+1 = \lambda \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = 1/4 \\ \lambda = 1/4 \end{cases}$ et donc $\boxed{M(1; 0; \frac{1}{4})}$

est le point d'intersect° de Δ et (CG)

IV **1** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_ne^{-u_n}\ ;\ u_0=1$

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N} ;\ u_n>0$

Init : $u_0=1>0$

Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$, on suppose $u_k>0$ et montrons $u_{k+1}>0$

$u_k>0$ donc $u_ke^{-u_k}>0$ (car $e^{-u_k}>0$)

et donc $u_{k+1}>0$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N} ;\ u_n>0$

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=u_ne^{-u_n}-u_n$

$=u_n(e^{-u_n}-1)$

et $u_n>0$

donc $-u_n<0$

donc $e^{-u_n}<1$ (exp ↑)

donc $e^{-u_n}-1<0$

D'autre part, $u_n>0$ donc par produit $u_n(e^{-u_n}-1)<0$

C'est à dire $u_{n+1}-u_n<0$ donc (u_n) décroissante.

3.a (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc par théorème (u_n) converge vers $l\geq 0$.

3b De plus $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f dérivable (donc continue)

et donc d'après le théorème du point fixe : $l=f(l)$

C'est à dire l solution de $xe^{-x}=x$

$\iff x(e^{-x}-1)=0$

$\iff x=0$ ou $e^{-x}=1$

$\iff x=0$ ou $x=0$

Finalement, la limite l est $l=0$.

V $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$; $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$ $a_0 = 0$; $b_0 = 12$

A. **1.a** $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1}$

$$= \frac{1}{12} \cdot (3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n)$$

$$= \frac{1}{12} (5b_n - 5a_n)$$

$$= \frac{5}{12} (b_n - a_n)$$

$$= \frac{5}{12} u_n$$

Donc **(u_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ avec $u_0 = 12$**

1b par théorème, $u_n = 12 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1c $0 < \frac{5}{12} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2.a $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - a_n$

$$= \frac{-a_n + b_n}{3}$$

$$= \frac{u_n}{3}$$

et d'après l'expression explicite de (u_n), $u_n > 0$ donc $a_{n+1} - a_n > 0$

donc (a_n) croissante.

2b On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{4}$

$$= -\frac{u_n}{4} < 0$$ donc (b_n) décroissante

B **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1}$

$$= 3 \cdot \frac{2a_n + b_n}{3} + 4 \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

$$= 3a_n + 4b_n$$

$$= v_n$$

Donc (v_n) est stationnaire. $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0$

$$= 3a_0 + 4b_0$$
$$= 48$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} -a_n + b_n = 12 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ 3a_n + 4b_n = 48 \end{cases}$$

Alors par combinaison : $3L_1 + L_2$ donne $7b_n = 36\left(\frac{5}{12}\right)^n + 48$

donc $$b_n = \frac{36\left(\frac{5}{12}\right)^n + 48}{7}$$

Et $L_2 - 4L_1$ donne $7a_n = 48 - 48\left(\frac{5}{12}\right)^n$

donc $$a_n = \frac{48\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right)}{7}$$