DS N°1

I **1a** On a $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$; $u_0 = 2000$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : $u_0 = 2000$; $u_1 = 0,9 . u_0 + 100$

$= 1900$

Donc on a bien $1000 < u_1 \leq u_0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose $1000 < u_{k+1} \leq u_k$ et on montre $1000 < u_{k+2} \leq u_{k+1}$

On a $1000 < u_{k+1} \leq u_k$

Donc $900 < 0,9u_{k+1} \leq 0,9u_k$ ($\times 0,9$ avec $0,9 > 0$)

Donc $1000 < 0,9u_{k+1} + 100 \leq 0,9u_k + 100$ ($+100$)

Donc $1000 < u_{k+2} \leq u_{k+1}$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leq u_n$

1b La question 1a nous montre que (u_n) est décroissante et minorée par 1000.
En conséquence, (u_n) converge vers $\ell \geq 1000$.

2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1000$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

$= 0,9u_n + 100 - 1000$

$= 0,9(u_n - 1000)$

$= 0,9v_n$

Donc (v_n) géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = 1000$ et de raison $q = 0,9$.

2b Par théorème, $v_n = v_0 q^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$= 1000 . 0,9^n$

D'autre part, on a $u_n = v_n + 1000$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1000 . 0,9^n + 1000$

2c On $-1 < 0,9 < 1$ donc par théo : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ donc par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$

3 Voici le script :

```
n=0
u=2000
while u>5 :
    u=0,9u+100
    n=n+1
return n
```

II $f(x) = x^2 e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\, e^{-x} - x^2 e^{-x}$ (par produit)

$= e^{-x}(2x - x^2)$

2 On déduit $f'(x) = e^{-x} \cdot x(2-x)$

Et sur $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ (poly de degré 2)

On déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	

$f(0) = 0$

$f(2) = 4e^{-2}$

$= \frac{4}{e^2}$

3 La tangente au point d'abscisse 1 est : $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Ici $f'(1) = e^{-1}$ et $f(1) = e^{-1}$

Donc $T : y = e^{-1}(x-1) + e^{-1}$ c'est-à-dire : $\boxed{T : y = e^{-1}x.}$

III $f_m(x) = (m-1)x^2 - (4m+1)x + m - 5$; $\mathcal{D} : y = -x+1$

1 $M(x,y) \in C_m \cap \mathcal{D}$ ssi $f_m(x) = -x + 1$

$\iff (m-1)x^2 - 4m\,x + m - 6 = 0$

Finalement, il n'y a pas de point d'intersection ssi le discriminant est négatif.

$\Delta = 16m^2 - 4(m-1)(m-6)$

$= 4(4m^2 - (m^2 - 7m + 6))$

$= 4(3m^2 + 7m - 6)$

Donc $C_m \cap \mathcal{D} = \emptyset \iff \Delta < 0$

$\iff 3m^2 + 7m - 6 < 0$

2 $3m^2+7m-6<0$

$\Delta' = 49+4.3.6$
$=121$

On a donc deux racines : $m=\frac{-7+11}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et $m=\frac{-7-11}{6}=-3$

On a donc le tableau de signe :

m		-3		$2/3$	
$3m^2+7m-6$	$+$	0	$-$	0	$+$

Il n'y a pas de point d'intersection pour $m\in\{-2;-1;0\}$

V On a $\forall n\in\mathbb{N};\ n\geq 2$: $-1\leq\cos(3n)\leq 1$

donc $n-1\leq n+\cos(3n)\leq n+1$ $(+n)$

et donc $\frac{n-1}{1-n^2}\geq u_n\geq\frac{n+1}{1-n^2}$ $\left(\div(1-n^2)\right.$ avec $\left.1-n^2<0\right)$

Donc finalement $\boxed{\frac{n+1}{1-n^2}\leq u_n\leq\frac{n-1}{1-n^2}}$

D'autre part $\frac{n+1}{1-n^2}=\frac{n(1+1/n)}{n^2(1/n^2-1)}$

$=\frac{1+1/n}{n(\frac{1}{n^2}-1)}$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\frac{1}{n^2}-1)=-\infty$ (par produit)

Donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{1-n^2}=0$

De même : $\frac{n-1}{1-n^2}=\frac{n(1-1/n)}{n^2(\frac{1}{n^2}-1)}$

$=\frac{1-1/n}{n(\frac{1}{n^2}-1)}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{1-n^2}=0$

Ainsi, par théorème des gendarmes: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$

III 1 $u_n = (n - n^3)(4 + n^2)$ pour $n \in \mathbb{N}$

$= n(1 - n^2)(4 + n^2)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - n^2) = -\infty$

par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 + n^2) = +\infty$

Donc par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2 $v_n = \dfrac{5n - n^2}{2n^4 - 6n^2}$;

$= \dfrac{n^2(5/n - 1)}{n^4\left(2 - \frac{6}{n^2}\right)}$

$= \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{\frac{5}{n} - 1}{2 - \frac{6}{n^2}}$

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{n} - 1 = -1$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \dfrac{6}{n^2} = 2$

Donc par quotient et produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3 $w_n = 5^{2n} - 12^n$

$= 25^n - 12^n$

$= 25^n\left(1 - \left(\frac{12}{25}\right)^n\right)$

Et $-1 < \frac{12}{25} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{12}{25}\right)^n = 0$

$25 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 25^n = +\infty$

Donc par somme et produit $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

4 $h_n = -\frac{3n}{e^{-n}}$

$= -3n e^n$

$e > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} (-3n) = -\infty$

Donc par produit, $\lim_{n \to +\infty} h_n = -\infty$

VII $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)$

$= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$ (somme des termes d'une suite arithmétique)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2(1+1/n)}{n^2}$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Et $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc par produit, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$