T^{ale} *3 octobre 2022*

$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$1 : Révisions, fonctions et suites (2h)

I **(6 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\,000$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

1. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

   b) Que pouvez-vous dire sur la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) En déduire que la forme explicite de (v_n) puis de (u_n).

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Soit $S > 1000$, on souhaite déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant S$. Compléter le programme Python ci-contre pour qu'il réalise cette tâche.

```python
def population(S) :
    n=0
    u=2000
    while ............ :
        u=.................
        n=................
    return ...............
```

II **(3 points)** On définit sur $\mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la dérivée de f s'exprime pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2)$$

2. Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représantative de f au point d'abscisse 1.

III **(3 points)** Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_m par

$$f_m(x) = (m-1)x^2 - (4m+1)x + m - 5$$

et on note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative. On considère également la droite $\mathscr{D} : y = -x + 1$.

1. Montrer que $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ n'ont pas de point d'intersection si est seulement si $3m^2 + 7m - 6 < 0$
2. En déduire l'ensemble des $m \in \mathbb{Z}$, pour lesquels $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ n'ont pas de point d'intersection.

IV **(2 points)** Complétez par le résultat ou bien par indéterminé le cas échéant.

✻ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = $ ....

✻ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = $ ....

✻ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -10^{10^{10}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = $ ....

✻ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -10^{-3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = $ ....

V **(2 points)** Soit pour $n \geq 2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n + \cos(3n)}{1 - n^2}$.

1. Donner (en justifiant) un encadrement de (u_n) par les nombres $\dfrac{n+1}{1-n^2}$ et $\dfrac{n-1}{1-n^2}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

VI **(4 points)**
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = (n - n^3)(4 + n^2)$; $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = \dfrac{5n - n^2}{2n^4 - 6n^2}$; $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. $w_n = 5^{2n} - 12^n$
4. $h_n = -\dfrac{3n}{\mathrm{e}^{-n}}$

VII **(1 point)** Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Démontrer que (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

VIII✳ Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n2^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$$
2. En déduire
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$$

IX✳ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

X✳ Soit $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$, montrer que :

$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$$

Indication : pour $y \in]-1;1[$ fixé, vous pourrez étudier la fonction $f_y(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$