FICHARD
Émilie

DS n°2 : Bazooka 2 en 1

8/8

Partie 1 :

$(u_n) \begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 1,9\,u_n\,(1-u_n) \end{cases}$

1. $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 1,9x\,(1-x)$

a) $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 1,9\,(1-x) + 1,9x \times (-1)$

$= 1,9 - 1,9x - 1,9x$

$= 1,9 - 3,8x$ ✓

$1,9 - 3,8x = 0 \Leftrightarrow -3,8x = -1,9 \Leftrightarrow x = 0,5$ on a donc le tableau :

x	0		$0,5$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,475$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$ $f(1) = 0$ $f(0,5) = 0,475$

b) On voit bien que si $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;0,475]$ donc $f(x) \in [0;1]$ (car $0,475 < 1$).

2. Je conjecture que (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,5$.

3

3. a) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

initialisation : pour $n=0$ $u_0 = 0,1$ $u_1 = 1,9 \times 0,1\,(1-0,1) = 0,171$

on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1/2$ donc initialisation vérifiée.

hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$,

montrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{1}{2}$

On a $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$ (par HR)

donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ (car $f \nearrow$ sur $[0; \frac{1}{2}]$)

donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 0,475$

2

D'autre part $0,475 < 0,5$, donc par transitivité :

$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{1}{2}$ donc hérédité démontrée

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

b) d'après a), (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc par théorème, (u_n) converge vers $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

1

c) $f(\ell) = \ell \iff 1,9\ell(1-\ell) = \ell$

$\iff 1,9\ell - 1,9\ell^2 - \ell = 0$

$\iff -1,9\ell^2 + 0,9\ell = 0$

$\Delta = (0,9)^2 - 4 \times (-1,9) \times 0 = 0,81$

$\ell_1 = \dfrac{-0,9 - \sqrt{0,81}}{2 \times (-1,9)} \approx 0,47$

$\ell_2 = \dfrac{-0,9 + \sqrt{0,81}}{2 \times (-1,9)} = 0$

2 ✓

or $(u_n) \nearrow$ et $u_0 = 0,1$ donc $\ell = \ell_1$ ✓