

DS N°2 : Bazooka 2 en 1 (30 min)

① Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

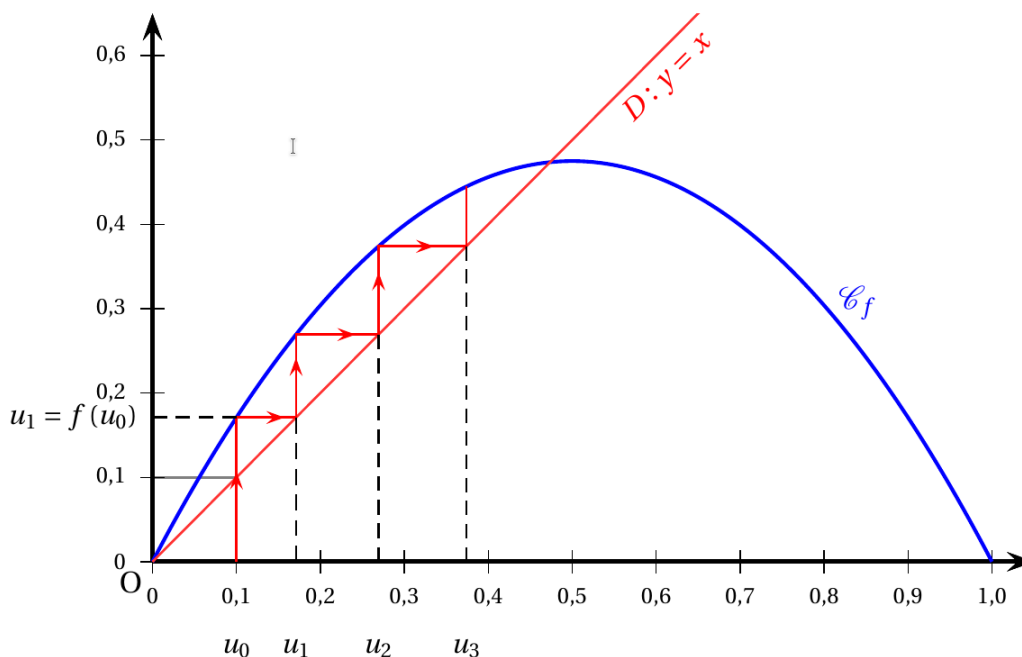
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - b) En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe C_f de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. a) En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

- b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
- c) On admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- d) (**hors barème**) Montrer que ℓ satisfait $f(\ell) = \ell$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On considère la fonction Python algo (p) où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :  
    u =1/4  
    n = 0  
    while u > 10**(-p):  
        u = 1/2*u*(1 - u)  
        n = n+1  
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande algo (p) de renvoyer une valeur.