𝒟𝒮 𝒩°3 : Limites (1h)

Ⓘ **(9 points)** Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \sqrt{x} - x$; en $+\infty$.

$f_2(x) = \dfrac{12x-3}{5-20x}$; en $\dfrac{1}{4}$

$f_3(x) = \dfrac{-x+5}{x^2-5x+6}$; en 2^+

$f_4(x) = e^{x-x^3}$; en $+\infty$

$f_5(x) = 2x - \sin x^2$; en $+\infty$

$f_6(x) = e^{2x+3} - e^{2x+1}$; en $+\infty$

Correction :

1. On a par factorisation : $f_1(x) = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$. Donc par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$.
2. On a
$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{12x-3}{5-20x} \\ &= \frac{3(4x-1)}{5(1-4x)} \\ &= \frac{-3}{5} \end{aligned}$$
Donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} f_2(x) = -\dfrac{3}{5}$.
3. On a $\lim\limits_{x\to 2}(-x+5) = 3$.
D'autre part : $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ car 2 est racine évidente.
On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-5x+6 = 0^-$ et donc par quotient $\lim\limits_{x\to 2^+} f_3(x) = -\infty$.
4. On a par théorème du plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^3 = -\infty$.
Et d'autre part $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$,
donc par composition (avec $X = x - x^3$), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = 0$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$-1 \leq -\sin x^2 \leq 1$$
Donc par somme :
$$2x-1 \leq -\sin x^2 \leq 2x+1$$

Et d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x)=+\infty$

6. On a par factorisation :
   $f_6(x)=\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^3-\mathrm{e})$
   et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x}=+\infty$ (par composée évidente).
   donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x)=+\infty$

II (9 points)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\mathrm{e}^x-x$$

a) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$.

Correction :

En $-\infty$, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$ on en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

En $+\infty$, par factorisation $g(x)=\mathrm{e}^x(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x})$

Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ donc finalement par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

b) Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}, g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

Correction :

pour tout $x\in\mathbb{R}, g'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

$$\begin{aligned} g'(x)<0 &\iff \mathrm{e}^x<1 \\ &\iff \mathrm{e}^x<\mathrm{e}^0 \\ &\iff x<0 \qquad \text{(Car exp strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{).} \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}, g(x)>0$.

Correction :

D'après le tableau de variations, 1 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$ donc pour $x\in\mathbb{R}, g(x)>0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$$

a) Expliquer pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Correction :

f est bien définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas. D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ ce qui veut dire que $\mathrm{e}^x - x > 0$ et donc que le dénominateur est non nul pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Correction :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x = +\infty$.
Donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) Montrer que sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}}$$

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x})} && \text{(factorisation par } \mathrm{e}^x\text{)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}} \end{aligned}$$

d) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Correction :

Par inverse de la croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

e) La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet-elle des asymptotes ? Si oui, lesquelles ?

Correction :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - x)e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

g) Dresser alors le tableau de variations de f.

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $(e^x - x)^2 > 0$ donc par produit le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

III **(2 points)** On rappelle que la fonction partie entière de x est définie sur $\mathbb{R}$ comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On rappelle qu'en conséquence, pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$x - 1 \leq E(x) \leq x \qquad (\star)$$

Les deux questions sont indépendantes :

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$

Correction :

Pour $x > 0$, on en divisant l'inégalité donnée par x :

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{E(x)}{x} \leq 1$$

Et le membre de gauche satisfait : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$ (par théorème du plus haut degré).

donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$

2. Montrer par un raisonnement par l'absurde que dans ($\star$), l'inégalité de gauche est améliorable et qu'en fait on a :

$$x - 1 < E(x)$$

Correction :

Il s'agit de montrer qu'à gauche on ne peut pas avoir égalité.
Supposons le contraire : Si $x - 1 = E(x)$, alors comme $E(x) \in \mathbb{Z}$, il en est de même pour $x - 1$ et donc pour x. C'est-à-dire $x \in \mathbb{Z}$. Mais alors dans ce cas $E(x) = x$.
Ceci est absurde car on a supposé $E(x) = x - 1$ ....!

IV✳ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Étudiez la limite de (u_n).

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

Correction :

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n}{n \times n \times \cdots \times n \times n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \ldots \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n} \end{aligned}$$

Chacun des facteurs $\dfrac{k}{n}$ avec k entre 2 et n est majoré par 1. Ainsi on peut écrire que $u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

et on termine avec le théorème des gendarmes car on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$