$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$3 : Limites (1h)

I **(9 points)** Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \sqrt{x} - x$; en $+\infty$.

$f_2(x) = \dfrac{12x-3}{5-20x}$; en $\dfrac{1}{4}$

$f_3(x) = \dfrac{-x+5}{x^2-5x+6}$; en 2^+

$f_4(x) = \mathrm{e}^{x-x^3}$; en $+\infty$

$f_5(x) = 2x - \sin x^2$; en $+\infty$

$f_6(x) = \mathrm{e}^{2x+3} - \mathrm{e}^{2x+1}$; en $+\infty$

II **(9 points)**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x$$

   a) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
   c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$$

   a) Expliquer pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   c) Montrer que sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$$

   d) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   e) La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet-elle des asymptotes ? Si oui, lesquelles ?
   f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$$

   g) Dresser alors le tableau de variations de f.

III **(2 points)** On rappelle que la fonction partie entière de x est définie sur $\mathbb{R}$ comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On rappelle qu'en conséquence, pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$x - 1 \leq E(x) \leq x \qquad (\star)$$

Les deux questions sont indépendantes :

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$
2. Montrer par un raisonnement par l'absurde que dans $(\star)$, l'inégalité de gauche est améliorable et qu'en fait on a :
$$x - 1 < E(x)$$

IV✳ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Étudiez la limite de (u_n).

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$