$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$4 : TVI et étude de fonctions (2h)

I Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

Correction :

Par théorème de croissance comparée, la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

Correction :

On cherche la limite de f en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc par quotient } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Correction :

Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

Correction :

On a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Sur $]0\ ;\ +\infty[$: $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^2 > 0$.

Donc par produit le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ (affine). Ainsi on a le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

$f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Correction :

Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe C_f et de la droite horizontale d'équation $y = m$.
D'après le tableau de variations :

- si $m < \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
- si $m > \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

Correction :

Notons T_a la tangente en a. Par propriété, on sait que T_a a pour coefficient directeur $f'(a)$. Nous avos donc :

$$\begin{aligned} T_a \parallel \Delta &\iff T_a \text{ et } \Delta \text{ ont même coefficient directeur} \\ &\iff f'(a) = -1 \\ &\iff \frac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \\ &\iff \mathrm{e}^a(a-1) = -a^2 \\ &\iff \mathrm{e}^a(a-1) + a^2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Correction :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x \times (x-1) + \mathrm{e}^x \times 1 + 2x \\ &= x\mathrm{e}^x + 2x \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x > 0$, $2x \geq 0$, et donc par somme $x\mathrm{e}^x + 2x \geqslant 0$, c'est-à-dire $g'(x) \geqslant 0$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ donc par produit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\mathrm{e}^x = +\infty$ et finalement par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On a de plus $g(0) = \mathrm{e}^0(0-1)+0 = -1$.
On déduit donc le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0	a	$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Correction :

Nous avons vu dans la question 5.a que Δ parallèle à la tangente T_a au point d'abscisse a si et seulement si $g(a) = 0$. Il s'agit donc de montrer que g admet une unique racine.

Sur $\mathbb{R}_+$:

- g est continue (car dérivable).
- g est strictement croissante
- $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in [-1; +\infty[$.

Donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $g(x) = 0$ admet une unique racine.

Ainsi il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

II

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Correction :

★ On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et par composée $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$.

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$

et par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

★ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ (par composée)

Alors par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

Correction :

f est dérivable et sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1-(-2)\mathrm{e}^{-2x} = 1+2\mathrm{e}^{-2x}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, donc par somme $1+2\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$.

On déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$	0	$+\infty$

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction :

Sur $\mathbb{R}$:

- f est continue (car dérivable).
- f est strictement croissante
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$.

Donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 0$ admet une unique racine α sur $\mathbb{R}$.

D'après la calculatrice : $0,42 < \alpha < 0,43$.

b) On souhaite programmer en Python un algorithme qui approxime α à 10^{-2} par balayage. Compléter les lignes 4,5, et 6 du script suivant :

```
1 def f(x):
2     return x-e**(-2*x)
```

```
3
4 h=...
5 a=...
6 while ...
7     a=a+h
8
9 print(a,"< alpha <",a+h)
```

Correction :

Les lignes 4,5,6 sont :

4 h=0,01

5 a=0

6 while f(a)*f(a+h)>0 :

4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Correction :

On a donc d'après le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle C la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes C et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe C le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à C en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $(t\ ;\ \mathrm{e}^{-t})$ de la courbe C.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$.

   a) Justifier que

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

Correction :

On a $M\,(t\ ;\ \mathrm{e}^{-t})$ donc $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$, donc par théorème : $OM^2 = t^2 + \mathrm{e}^{-2t}$

et finalement

$$OM = h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

b) Montrer que, pour tout nombre réel t,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

Correction :

En vertu de la formule : $\dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$:

On a

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{2t - 2\mathrm{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} \\ &= \frac{t - \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} \\ &= \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}. \end{aligned}$$

c) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe C pour lequel la longueur OM est minimale. Placer ce point sur le graphique.

Correction :

Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur c'est-à-dire $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.
On peut donc dresser le tableau de variations de h :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations : $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h.
La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $g(\alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point A$(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha})$.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe C.

a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

Correction :

$\mathcal{C}$ est la courbe de g et A a pour abscisse α donc le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-\alpha}$

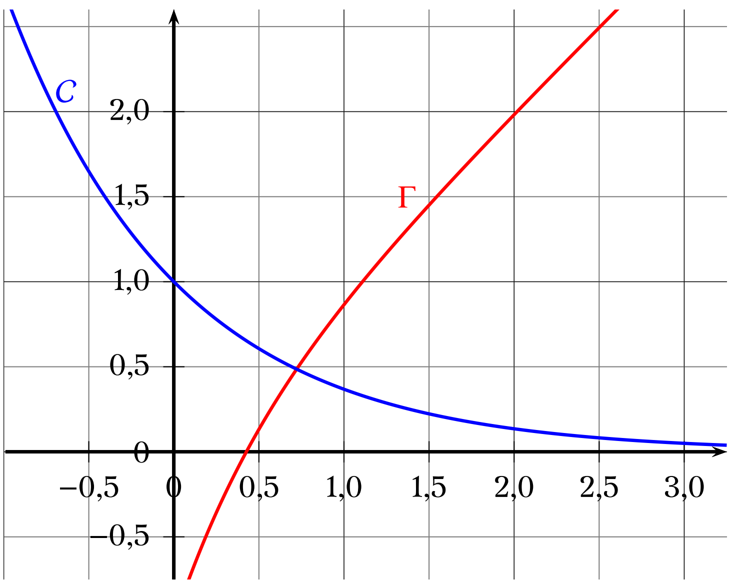
b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Tracer ces droites sur le graphique.

Correction :

On a $O(0;0)$ et $A\,(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha})$ donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\alpha\\ \mathrm{e}^{-\alpha}\end{pmatrix}$.
D'autre part T a pour coefficient directeur $g'(\alpha)$ donc T a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ g'(\alpha)\end{pmatrix}$ Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{u}.\overrightarrow{OA} &= \alpha + \mathrm{e}^{-\alpha}g'(\alpha)\\ &= \alpha - \mathrm{e}^{-2\alpha}\\ &= f(\alpha)\\ &= 0\end{aligned}$$

Et donc (OA) et T sont perpendiculaires.



III✳ On considère la suite (u_n) définie pour les entiers naturels non nuls par :

$$u_n = E\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

où E représente la fonction partie entière.
La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Correction :

On a $\dfrac{n^2-1}{n^2} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$.
On en déduit l'encadrement suivant pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{n^2-1}{n^2} < 1$$

Alors, on déduit $E\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
Par conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

IV✳ Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On sait que $F'(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.
On pose $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\varphi'(x)$ et montrer que φ est une fonction constante que l'on déterminera. Que pouvez-vous en déduire pour F ?

Correction :

En utilisant la dérivée de la composée, on a : $(F(-x))' = -(F'(-x)) = -f(-x)$.
On déduit :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x) - f(-x)\\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

On déduit que φ est une fonction constante.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0)\\ &= 2F(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

On déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) + F(-x) = 0$ et donc $F(-x) = -F(x)$. En conséquence F est impaire.