$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$4 : TVI et étude de fonctions (2h)

(I) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.
   a) Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

(II)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   b) On souhaite programmer en Python un algorithme qui approxime α à 10^{-2} par balayage. Compléter les lignes 4,5, et 6 du script suivant :

```python
def f(x):
    return x-e**(-2*x)

h=...
a=...
while ...
    a=a+h

print(a,"< alpha <",a+h)
```

4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle C la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes C et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe C le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à C en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $(t\ ;\ \mathrm{e}^{-t})$ de la courbe C.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$.

   a) Justifier que

   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

   b) Montrer que, pour tout nombre réel t,

   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

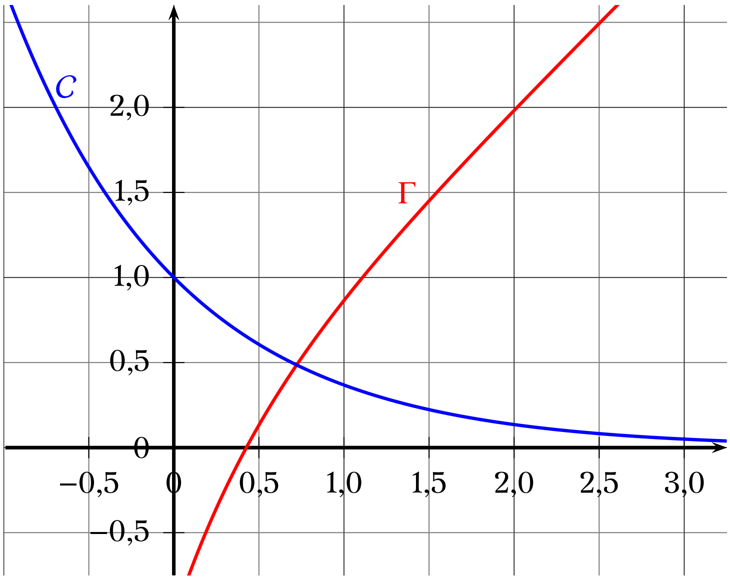
   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   c) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe C pour lequel la longueur OM est minimale. Placer ce point sur le graphique.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe C.

   a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

   b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Tracer ces droites sur le graphique.



III✳ On considère la suite (u_n) définie pour les entiers naturels non nuls par :

$$u_n = E\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)$$

où E représente la fonction partie entière.
La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

IV✳ Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
On sait que $F'(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.
On pose $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\varphi'(x)$ et montrer que φ est une fonction constante que l'on déterminera. Que pouvez-vous en déduire pour F ?