DS N°5

I $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

A1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x(-e^{-x}) + e^{-x}$
$= e^{-x}(1-x)$

Sur $\mathbb{R}$: $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ qui est affine
On déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

A2 $f(x) = xe^{-x}$

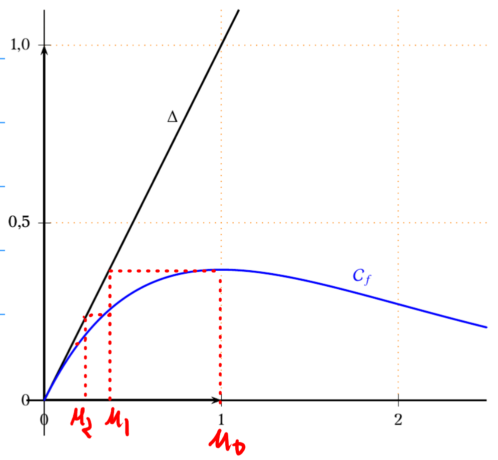
Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ (composée immédiate)

Donc par produit, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Donc par inverse de la croissance comparée : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

B1



On conjecture (u_n) décroissante et (u_n) converge vers 0

B2 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

- Initialisation : $u_0 = 1$; $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{e}$ donc on a bien $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose $0 < u_{k+1} \leq u_k \leq 1$ et on montre $0 < u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$

On a $0 < u_{k+1} \leq u_k \leq 1$

Alors $f(0) < f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq 1$ (car $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$)

donc $0 < u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{e} \leq 1$

On a bien montré l'hérédité.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

B3a De ce qui précède, on déduit (u_n) décroissante et minorée

Donc par théorème (u_n) converge vers $l \geq 0$

B3b
$$
\begin{aligned}
f(x) = x &\iff x e^{-x} = x \\
&\iff x(e^{-x} - 1) = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{-x} = 1 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = 0 \quad (\text{car } \ln e^{-x} = -x) \\
&\iff x = 0
\end{aligned}
$$

Donc (u_n) a pour limite 0.

C Il s'agit d'étudier le signe de $f''(x)$.

On a $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ sur $\mathbb{R}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x}$
$$= e^{-x}(x-2)$$

$f''(x)$ est donc du signe de $(x-2)$ qui est affine.

On déduit le tableau de convexité

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		Concave		Convexe	

En $x=2$, on a un point d'inflexion de coordonnées : $(2, f(2))$
c'est-à-dire $P(2 ; \frac{2}{e^2})$ est point d'inflexion.

II $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

1a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+$

Donc par quotient, $\lim\limits_{0} f = -\infty$

1b $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée

Donc par somme $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

1c 1.a nous montre que l'axe (Oy) est asymptote verticale à C
1.b nous montre que l'axe (Ox) est asymptote horizontale à C en $+\infty$

2.a $-1-2\ln x > 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\ln x < -1$

$\Leftrightarrow \quad \ln x < -\frac{1}{2}$ $(\div 2$ avec $2>0)$

$\Leftrightarrow \quad x < e^{-1/2}$ (Car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \quad x < \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Ainsi $S =]0 ; \frac{1}{\sqrt{e}}[$

2b On a $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ pour $x>0$

Donc $\forall x>0$: $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - (1+\ln x).2x}{x^4}$

$$= \frac{x - 2x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x(-1-2\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

2c Pour $x>0$, $x^3>0$ donc par quotient $f'(x)$ est du signe de $N(x) := -1-2\ln x$ dont le signe a été étudié en 2.a

On déduit donc le tableau de variation de f

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

avec $f(\sqrt{e}) = \dfrac{1+\ln(e^{-\frac{1}{2}})}{e^{-1}}$

$$= \frac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}}$$

$$= \frac{e}{2}$$

$\simeq 1{,}36$

3 $\mathcal{C}$ coupe l'axe (Ox) $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $1+\ln x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\ln x = -1$

$\Leftrightarrow$ $x = e^{-1}$ (car $\exp(\ln x) = x$)

Donc $\mathcal{C}$ coupe (Ox) en $A(e^{-1}; 0)$

III Ce genre de problème s'appelle optimisation sous contrainte.

On cherche à maximiser $g(x,y) = xy^2$ le long de la droite $y = 20 - x$.

Si $y = 20 - x$, alors $q(x,y) = x(20-x)^2$ et c'est donc une fonction de x.

Soit $\varphi(x) = x(20-x)^2$
$$= x(x^2 - 40x + 400)$$
$$= x^3 - 40x^2 + 400x$$

φ est dérivable et $\varphi'(x) = 3x^2 - 80x + 400$ qui est de degré 2.

$\Delta = 1600 = 40^2$ donc on a deux racines : $x = \frac{80-40}{6} = \frac{20}{3}$ ou $x = 20$

On déduit le tableau de variation de φ :

x	$-\infty$		$20/3$		20		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	$\frac{800}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a

$\varphi(\frac{20}{3}) = 20.\frac{40}{3} = \frac{800}{3}$

$\varphi(20) = 0$

Le maximum cherché est donc $\frac{800}{3}$, atteint pour $x = \frac{20}{3}$; $y = \frac{40}{3}$