$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$5 : Suites et fonction (1h30)

I **(11 points)**

Partie A : On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et en déduire les variations de f.
2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

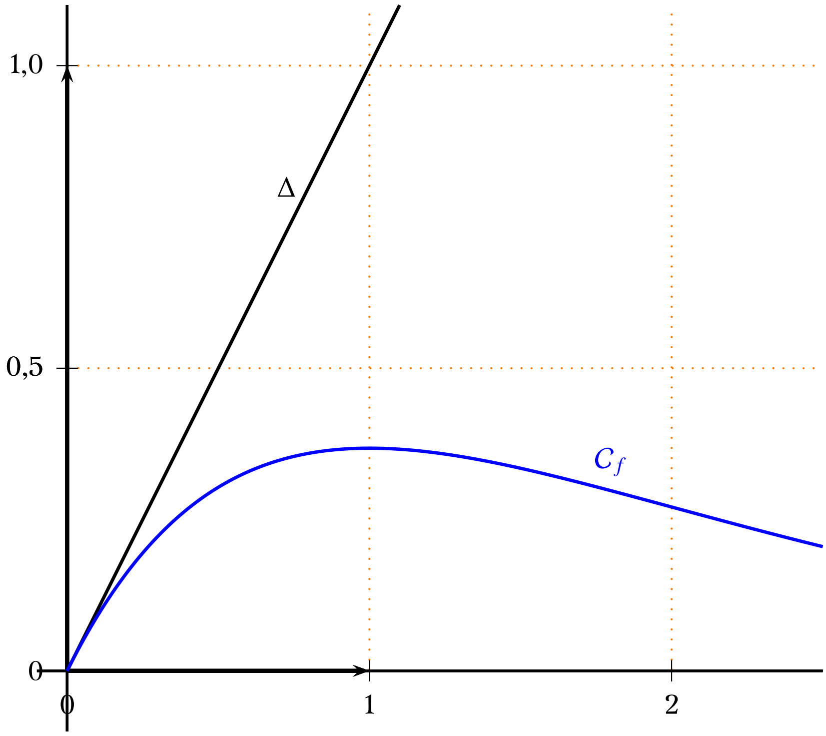
Partie B : Ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. En utilisant la courbe C_f et la droite Δ, placer les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses. Laisser les tracés apparents.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

.

3. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Résoudre cette équation et déterminer la valeur de cette limite.



Partie C :

Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, et donnez les coordonnées des points d'inflexion.

II **(9 points)** Soit f défnie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer la limite de f en 0.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
2. a) Résoudre l'inéquation sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$-1 - 2\ln x > 0$$

   b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$$

   c) En déduire le tableau de variations de f
3. Déterminer les points d'intersecion de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

III$\ast$ Quel est le maximum de $q(x, y) = xy^2$ sachant que $x \geq 0$ et $x + y = 20$?